ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ХАЛҚ ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МУҚИМИЙ НОМИДАГИ
ҚЎҚОН ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ
БОШЛАНҒИЧ ТАЪЛИМ МЕТОДИКАСИ КАФЕДРАСИ

5141600 – Бошланғич таълим ва спорт тарбиявий иш йўналиши
4-курс талабалари учун

МАТЕМАТИКА

фанидан муаммоли маъруза

М А Т Н Л А Р И

Тузувчи: Ф.РАСУЛОВА.

Қ Ў Қ О Н – 2 0 0 7

Математика фанидан тайёрланган ушбу маъруза матнлари 5141600 – Бошланғич таълим ва спорт тарбиявий иш йўналиши 4- курс талабаларига мўлжалланган.

Муҳаррир: Исақов Зокиржон,
БТМ кафедраси катта ўқитувчиси,
филология фанлари номзоди.

Мазкур маъруза матнлари ҚДПИ бошланғич таълим методикаси
кафедрасининг 2007 йил 3 сентябрдаги
№1 йиғилишида чоп этишга рухсат этилган.

1- Мавзу: Геометриянинг вужудга келиши ҳақида қисқача маълумот

РЕЖА:

1. Геометрия фани ва унинг аҳамияти ҳақида.
2. Геометрия фанининг тарихий манбалари.
3. Геометрик маълумотларнинг болаларга боғчада ва бошланғич синфларда берилиши.
4. 5- синфларда геометрик маълумотлардан фойдаланиш ва фигуралар устида хисоблаш масалаларининг ўрни.
5. Асосий систематик геометрия курсининг қурилиши:
   а) Планиметрия ва унда бериладиган маълумотлар;
   б) Стереометрия ва унда бериладиган маълумотлар.
6. Якун: Геометрия курси – систематик курс эканлиги.

АДАБИЁТЛАР: (10), [11], [12], [13], (14]

Геометрия – математиканинг ажралмас қисми бўлиб, математика фанининг ривожланишида катта аҳамиятга эгадир.

Геометрия фани қадимий фан бўлиб, у узоқ тарихга эга. Геометрияга тааллуқли қадимий манбалар қадимий Миср математикасининг ривожланишига тааллуқли бўлиб, у Ринд ва Москва папирусларида акс этган.

Англия сайёҳи Ринд 1858 йили Нил дарёси қирғоқларига саёҳат даврида эрамиздан аввалги 1800 йилларга тааллуқли математика ва геометрияга оид папирусни сотиб олади ва уни Буюк Британия музейига топширади.

Бу папируснинг узунлиги 5,5 метр, эни 3,2 см бўлиб, унда амалий характердаги 84 та масала бўлиб, касрлар устида амаллар бажариш, тўғри тўртбурчак, учбурчак, трапеция ва доираларнинг юзасини ҳисоблашга доир, параллелопипед, цилиндр ва пирамидаларнинг ҳажмини ҳисоблашга, шунингдек пропорционал бўлакларга бўлиш ва геометрик прогрессияларга оиддир.

Иккинчи папирус Москва номи билан аталиб, у эрамиздан аввалги 2000 йилларга мансубдир. Унинг узунлиги 5,44 метр ва эни 8 см бўлиб, унда 18 та арифметика ва 7 та геометрияга оид масала мавжуд.

Бу икки папирусдаги масалалар ва уни ҳал қилинишидан қадимий мисрликларнинг математик билим савиясини ва уни қўллаш усулларини билиш мумкин.

Олимларимизнинг бундан 100 йиллар муқаддам икки дарё (Фрот ва Дажла) оралиғига жойлашган Шумер-Бобилликларни ўрганиш учун олиб борган текширишлари, археологик ёдгорликлардан эрамиздан 2800 йиллар олдин, бу икки давлат ташкил топганлиги ва улардаги фан ва маданият ривожлана бошлаганлиги хақида маълумотларга эга бўладилар. Улар текислик ва фазодаги геометрик билимларга эга бўлиб, уларнинг ўзига хос формулалари мавжуд бўлганлиги маълум бўлди.

Математика тарихи соҳасида ҳозиргача эришилган муваффақиятлар бизга геометриянинг фан соҳасида ривожланиши Грециядан бошланганлигини исботлайди. Геометрия тарихини ўрганувчи олимлар, геометрик маълумотлар Миср ва Шумер – Бобилликларидан Грецияга ўтганлигини тасдиқлайдилар.

Грек файласуфлари Миср ва Шумер-Бобил донишмандлари ишлари билан таниша бошлаганлар. Улар орасида атоқли файласуфлар Аристотелғ (384-321), Платон (429-348), Фалес (640-556), Демокрит (460-360), Анаксимандр (610-546), Пифагор (580-500), Гишгай (э.а.1 аср), Архит (400- 365), Гиппократ (э.а. V аср), Евдокс (410-355), Евклид (365-300), Архимед (287-212), Апполоний (265-170), Эратосфен (276-194), Герон (э.а. I аср) ва бошқалар математик тараққиётга салмоқли ҳисса қўшганлар.

Ҳозирги вақтда биз ўрганаётган геометрия курси Евклид томонидан системага солиниб, назарий томондан асосланган «Негизлар» асарининг ўрта мактабга мослаб тузилган қисмидир.

Мактабда ўрганиладиган геометрик тушунчалар системаси ҳақидаги маълумот ва уни ўрганиш тартиби ҳақида мулоҳаза қиламиз.

Геометрик тушунчалар биз биламизки, болаларга геометрик фигуралар ёрдамида мактабгача бўлган даврда, боғчада бера бошланади. Боғчада болалар тўртбурчак, учбурчак, доира, куб, пирамида, цилиндр, шар каби фигуралар ва уларнинг айрим элементлари билан танишадилар, улар ёрдамида ҳар хил ўйинлар ташкил қилиб; уйлар, машиналар ва ҳоказо нарсаларни ясайдилар.

Боғчада геометрик маълумотлар, умуман математик маълумотлар ўйин орқали берилади. Фигураларни номи уларни моделини кўрсатиш ёрдамида ўйинчоқ сифатида таништирилади. Бошланғич синфда бу тушунчалар давом эттирилиб, бу фигураларни ўлчовлари билан таништирилади ва улар устида айрим ҳисоблаш ишлари олиб борилади. Бу иш асосан амалий ишлар ёрдамида, яъни фигураларни узунлиги, эни ва баландлигини ўлчаш, уларни периметрини топиш, кейинроқ юзасини ҳисоблаш каби маълумотлар билан шуғулланади. Бошланғич синфда қўшиш, кўпайтириш амалларини хоссалари ҳам кесмаларни қўшиш, кўпайтириш орқали берилади.

5- синфда геометрик фигуралардан соддаларининг элементлари орқали ҳисоблаш ва амалий ишлар ўтказилади. Асосий системали геометрия курси ўрта мактабнинг 6- синфидан бошланади.

Системали геометрия курси асосан 2 қисмга бўлиб ўрганилади. Биринчи қисм текисликдаги геометрик тушунча ва фигураларга бағишланган бўлиб, уни «планиметрия» дейилади. Иккинчи қисм фазовий фигураларни ўрганишга бағишланган бўлиб, уни «стереометрия» дейилади.

Планиметрияда аввал содда геометрик фигуралар (нуқта ва тўғри чизиқ) ва уларнинг хоссалари берилади. Сўнгра системали геометрия курси берилади. Унда геометрия курсини қуриш учун зарур бўлган жумлалар турлари, таъриф, аксиома, теорема ва уларни исботлашни нима эканлиги берилади.

Геометрия асосий қисми келтирилган жумлалар ёрдамида бошланғич тушунчалардан келиб чиқиб қурилади. Унинг мазмунини бурчаклар, улар орасидаги муносабатлар ва уларнинг турлари, учбурчаклар, тўртбурчаклар, улар орасидаги муносабатлар, уларнинг турлари, уларни ясаш, тўғри бурчакли учбурчаклар, уларнинг бурчаклари билан томонлари орасидаги муносабат ёрдамида тригонометрик функциялар киритилади. Сўнгра текисликда Декарт координаталари киритилиб, унинг ёрдамида кесма ўртасининг координаталари, 2 нуқта орасидаги масофа, айлана тенгламаси, тўғри чизиқ тенгламаси, тўғри чизиқларнинг координата текислигида жойлашиши, тўғри чизиқ билан айлананинг кесишиш шартлари киритилади.

Сўнгра фигураларни алмаштириш бўлимида «ҳаракат» тушунчаси киритилиб, унинг хоссалари ва турлари берилади. Ҳаракат натижасида ҳар қандай фигура ўзига тенг фигурага алмашиши кўрсатилади ва бунга оид параллел кўчириш, симметрик алмаштириш, нуқта атрофида маълум бурчакка буриш билан фигура тенг фигурага алмаштирилиши кўрсатилади. Бу тушунчалар ёрдамида текисликда вектор тушунчаси киритилади.

Кейин кўпбурчакларни ҳосил қилиниши, уларнинг турлари, фигураларни юзаси ва уларни ҳисоблаш формулалари берилади.

Сўнгра геометриянинг стереометрия қисми бошланади. Бу бўлимда стереометрия аксиомалари, тўғри чизиқ ва текисликларнинг параллеллиги, перпендикулярлиги хақидаги маълумотлар берилади. Сўнгра фазода Декарт координаталар системаси ва фазода векторлар ҳақидаги тушунча берилади.

Кўпёқлар, уларнинг турлар ва кўпёқларга тегишли масала ва мулоҳазалар, айланма жисмлар – цилиндр, конус, шар ва унинг тенгламаси ҳақидаги тушунчалар ва уларнинг ҳажми ва сиртлари ҳақидаги маълумот берилади.

Юқорида келтирилган тушунчалар бир-бирини тўлдириб системани ташкил қилади.

Саволлар:

1. Геометриянинг келиб чиқиши ҳақидаги тарихий маълумотларни айтинг.
2. Геометрик фигураларни боғча ва бошланғич мактабда ўрганиш хақида маълумот беринг.
3. Геометрия курсининг тузилиши ва асосий тушунчалари хақида маълумот беринг.

2- Мавзу: Мактабда ўрганиладиган геометрик тушунчалар системаси. Геометрик фигуралар, уларнинг таърифи, хоссалари ва аломатлари.

РЕЖА:

1. Геометрия курсидаги бошланғич тушунчалар: текислик, тўғри чизиқ ва нуқта хақида.
2. Энг содда геометрик фигураларнинг асосий хоссалари.
3. Бурчаклар, уларнинг элементлари, турлари.
4. Учбурчаклар, уларнинг элементлари, турлари, учбурчакларнинг тенглик аломатлари.
5. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси.
6. Тўртбурчаклар, уларнинг турлари хоссалари.
7. Айлана, доира, уларнинг элементлари ва хоссалари.
8. Кўпбурчаклар, уларнинг турлари, элементлари ва хоссалари.

АДАБИЁТЛАР: [10], [11]г [12], [13], [14] Геометрия курсини ўрганиш учун асосий бошланғич тушунчалар текислик, тўғри чизиқ ва нуқта бўлиб, уларга таъриф берилмайди, уларни амалий йўллар билан тушунтирилади. Текислик – тинч турган сувнинг сатҳи сифатида, тўғри чизиқ – иккита текисликнинг кесишиш чизиғи эканлиги, нуқта эса – 1 текисликдаги икки тўғри чизиқнинг умумий қисми сифатида тушунтирилади. Текисликнинг қалинлиги йўқлиги, тўғри чизиқни фақат узунлиги борлиги нуқтанинг ҳеч қандай ўлчами йўқлиги келтирилади.

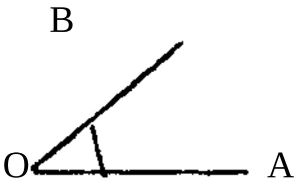
Геометрия курсидаги энг содда фигураларга нуқта, тўғри чизиқ ва уларнинг бўлаклари киради. Буларнинг ўзига хос хоссалари мавжуд бўлиб, унда нуқта ва тўғри чизиқлар текисликда жойлашуви ва уларнинг тегишлилик хоссалари берилади. Кесма ва бурчакларни ўлчашнинг асосий хоссалари, уларнинг йиғиндиси ва айирмасини ўлчаш асбоблари (чизғич ва транспортир) ёрдамида аниқлаш.

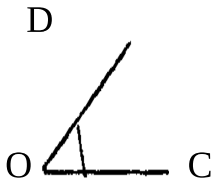
A ├──────┤ B C ├──────┤ Д AB=3 см, CD=4см,

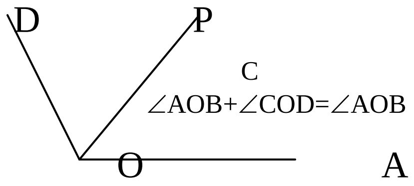
AB+CD=AD A 3см B C 4см D

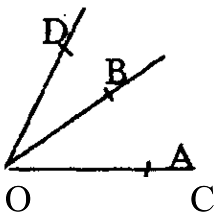
AD=AB+CD=3см+4см=7см.

Иккита бурчакнинг йиғиндиси қандай ҳосил қилиниши ва транспортир ёрдамида ўлчаш кўрсатилади:

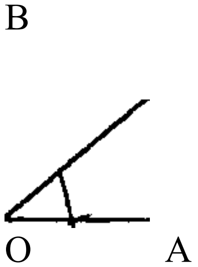




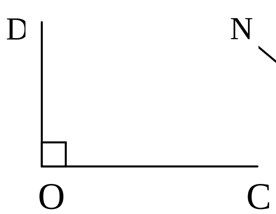




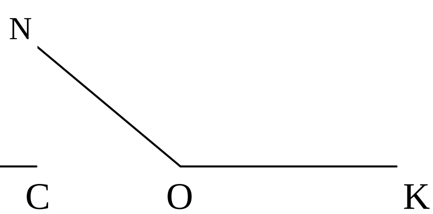
∠AOB да AO, OB-бурчакнинг томонлари. O нуқта бурчакнинг учи.



ўткир ∠



тўғри ∠



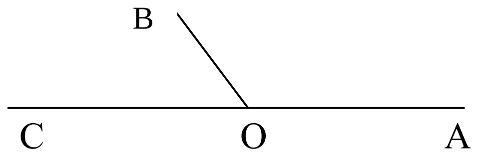
ўтмас ∠

90° га тенг бурчак тўғри бурчак деб аталади.

Тўғри бурчакдан кичик бурчак ўткир бурчак деб аталади.

90° дан катта бурчак ўтмас бурчак деб аталади.

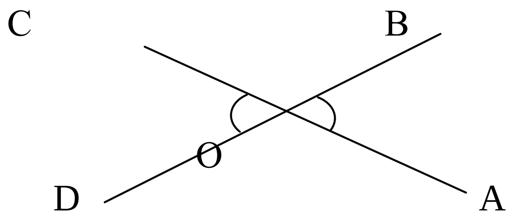
Таъриф. Агар иккита бурчакнинг битта томони умумий, колган томонлари тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар бўлса, улар қўшни бурчаклар дейилади.



АОВ бурчак ВОС бурчакка кўшни бурчак

Теорема. Қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг.

Таъриф. Агар икки бурчакдан бирининг томонларининг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлари бўлса, бу икки бурчак вертикал бурчаклар дейилади.



$\angle$ AOB ва $\angle$COD вертикал бурчаклардир

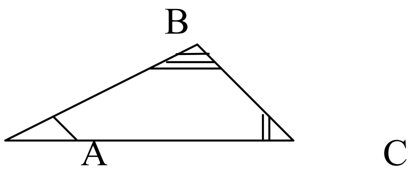
Теорема. Вертикал бурчаклар тенг.

$$\angle AOB = \angle COB.$$

Учбурчаклар, уларнинг элементлари, турлари.

Учбурчакларнинг тенглик аломатлари.

Таъриф. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан ва шу нуқталарни иккиталаб туташтирувчи 3 та кесмадан иборат фигура учбурчак дейилади.

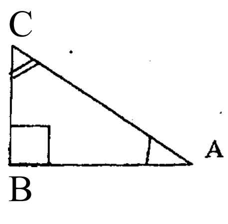


А, В, С — учбурчакнинг учлари;

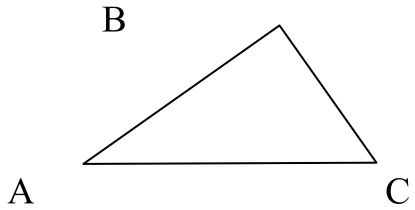
АВ, АС, ВС —учбурчакнинг томонлари;

$\angle$АВС, $\angle$ВАС, $\angle$АСВ—учбурчакни бурчаклари

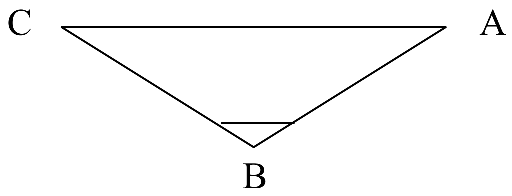
Таъриф. Битта бурчаги 90° га тенг бўлган Δ тўғри бурчакли учбурчак дейилади.



Таъриф. Ҳамма бурчаклари ўткир бурчак бўлган учбурчак ўткир бурчакли учбурчак дейилади.



Таъриф. Битта бурчаги ўтмас бурчак бўлган учбурчак ўтмас бурчакли учбурчак дейилади.

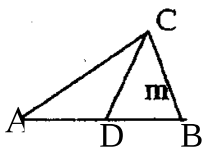


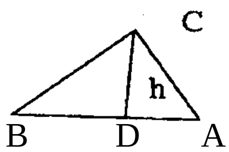
Учбурчакнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги муносабат: катта томон қаршисидаги катта бурчак, ва аксинча катта бурчак қаршисидаги катта томон ётиши тушунтирилади.

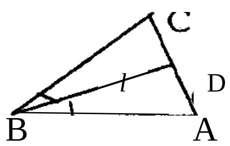
Таъриф. учбурчакнинг бурчагидан унинг қаршисидаги томон ўртасига ўтказилган кесма медиана дейилади.

Таъриф. учбурчакнинг бир учидан унинг қаршисидаги томонга туширилган перпендикуляр кесма учбурчакнинг баландлиги дейилади.

Таъриф. учбурчакнинг бир бурчагини тенг иккига бўлувчи ва қаршисидаги томон билан кесишгунча бўлган кесмани учбурчакнинг биссектрисаси дейилади.

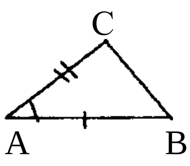


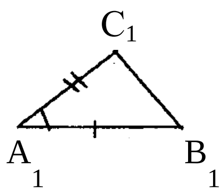




Учбурчакларнинг тенглик аломатлари.

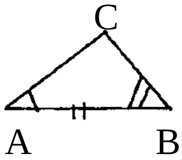
1- аломат. Икки томони ва улар орасидаги бурчагига кўра тенглик аломати.

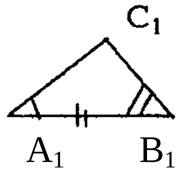




$$\left.\begin{aligned} AB &= A_1B_1 \\ AC &= A_1C_1 \\ \angle A &= \angle A_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1}$$

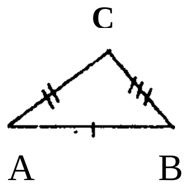
2- аломат. Бир томони ва унга ёпишган икки бурчагига кўра тенглик аломати.

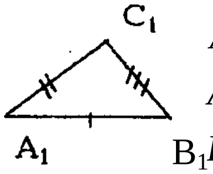




$$\left.\begin{aligned} AB &= A_1B_1 \\ \angle A &= \angle A_1 \\ \angle B &= \angle B_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1}$$

3- аломат. Учбурчакларнинг учта томонига кўра тенглик аломати.



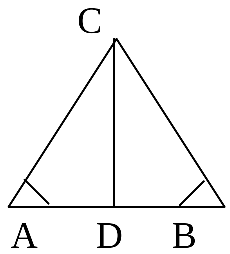


$$\left.\begin{array}{l} AB=A_1B_1\\ AC=A_1C_1\\ BC=B_1C_1\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1}$$

Тенг ёнли учбурчак ва унинг хоссалари.

Агар учбурчакнинг 2 та томони тенг бўлса, уни тенг ёнли учбурчак дейилади.

Тенг томонлар ён томонлар, тенг бўлмаган томон асоси дейилади.



AC, BC — учбурчакнинг ён томонлари,
AB — учбурчакнинг асоси.

Тенг ёнли бурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг бўлади. ∠A=∠B.

Теорема. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ўтказилган медианаси ҳам баландлик, ҳам биссектриса бўлади.

Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси.

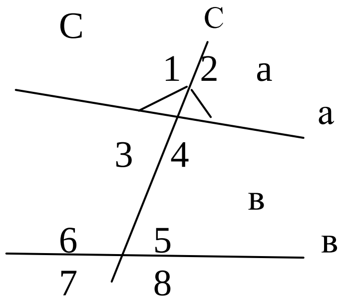
Бунда тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатлари берилиб, кейин учбурчак нинг бурчаклари йиғиндиси чиқарилади.

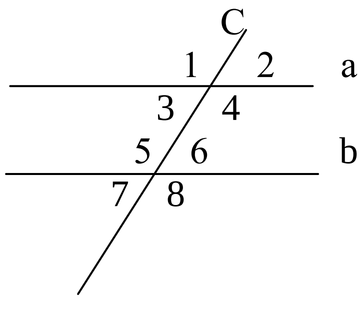
Теорема. Учинчи тўғри чизиққа параллел бўлган икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.

________a__________ ________в___________

________с___________

Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесганда ҳосил бўладиган бурчаклар: С тўғри чизиқ А ва В ни кесувчи.





(1,5), (2 ;6), (3 ;7), (4 ;8)-мос бурчаклар.

(4, 5), (3 ва 6) -ички бир томонли бурчаклар.

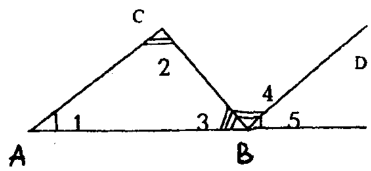
(1;7), (2;8) -ташқи бир томонли бурчаклар.

(3;5), (4;6) -ички алмашинувчи бурчаклар.

(1;8), (2;7) -ташқи алмашинувчи бурчаклар.

Тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатлари келтирилади. Шулардан фойдаланиб учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси келтириб чиқарилади.

Теорема. Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг.

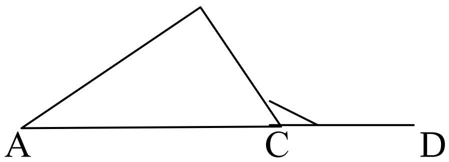


BD // AC ўтказамиз. $\angle 3+\angle 5+\angle 4=180^0$.

$\angle 1=\angle 4$-мос бурчаклар.

$\angle 2=\angle 5$-ички алмашинувчи бурчаклар.

Теорема. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчаклар йиғиндисига тенг.



$\angle BCD$-учбурчакнинг ташқи бурчаги.

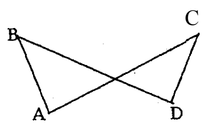
$\angle A+\angle B+\angle ACB=180° \rightarrow \angle A+\angle B= 180° - \angle ACB$. (1).

шаклдан: $\angle BCD = 180° - \angle ACB$. (2)

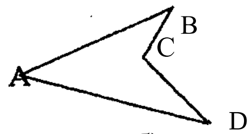
(1) ва (2) дан: $\angle A+\angle B=\angle BCD$

Тўртбурчаклар, уларнинг турлари ва хоссалари.

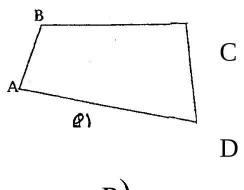
Тўртта нуқта ва бу нуқталарни кетма-кет туташтирувчи тўртта кесмадан иборат фигура тўртбурчак дейилади.



а)



б)

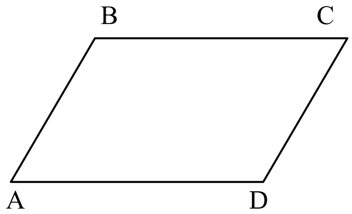


в)

Геометрия курсида а), б) кўринишидаги фигуралар ва уларнинг хоссалари ҳақида фикр юритилмайди.

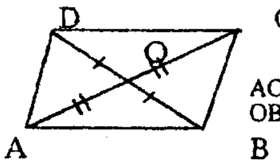
в) кўринишидаги тўртбурчаклар, уларнинг элементлари (учлари, томонлари, қўшни томонлари, қарама-қарши томонлари, диагоналлари ва бурчаклари) ўрганилади. Турлари: параллелограмм, тўғри тўртбурчак, ромб, квадрат.

Қарама-қарши томонлари параллел бўлган тўртбурчак параллелограммдир.



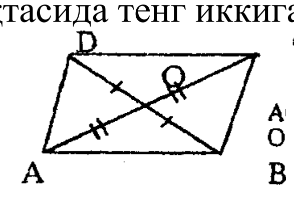
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD$$ -параллелограмм

Теорема. Агар тўртбурчакнинг диагоналлари кесишса ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, бу тўртбурчак параллелограммдир.



$$\left.\begin{array}{l} AO = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD$$ — параллелограмм

Теорема. Параллелограммнинг диагоналлари кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

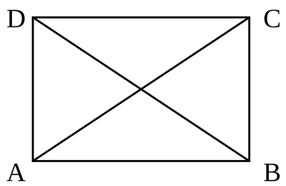


ABCD — параллелограмм $\Rightarrow \begin{cases} AO = OC \\ BO = OD \end{cases}$

Бу хоссадан фойдаланиб параллелограммнинг бошқа хоссалари, қарама - қарши бурчаклари тенглиги ва қарама-қарши томонлари тенглиги келиб чиқади.

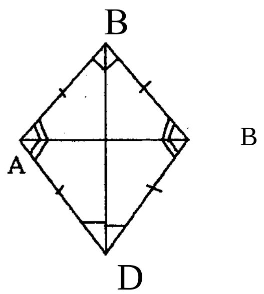
Ҳамма бурчаклари тўғри бурчак бўлган тўртбурчаклар тўғри тўртбурчак дейилади.

Теорема. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг.



ABCB тўғри тўртбурчак $\leftrightarrow$ AC=BD

Ҳамма томонлари тенг бўлган параллелограмм ромбдир. Ромбнинг диагоналлари тўғри бурчак остида кесишади. Ромбнинг диагоналлари унинг бурчаклари биссектрисасидир.



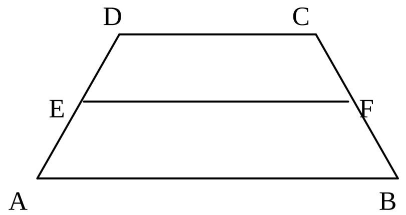
Ҳамма томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчак квадрат дейилади.

Квадрат ромб ҳамдир, шунинг учун у ҳам ромбнинг, хам тўғри тўртбурчакнинг хоссасига эга.

Трапеция ва унинг хоссалари берилади.

Иккита қарама-қарши томонларигина параллел бўлган тўртбурчаклар трапеция дейилади.

Параллел томонлари унинг асослари, параллел бўлмаган томонлари унинг ён томонлари дейилади. Ён томонлари тенг бўлган трапеция тенг ёнли трапеция дейилади. Ён томонларини ўрталарини туташтирувчи кесма трапециянинг ўрта чизиғи дейилади.



EFIIAB, EFIIDC

$$EF = \frac{AB + DC}{2}$$

Саволлар:

1. Планиметрия курсининг асосий тушунчаларини айтинг.
2. Текислик фигураларининг таърифи, хоссалари, аломатларини айтинг.
3. Учбурчаклар тенглик аломатларини айтинг.
4. Учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси 180^0 га тенглигини исботланг.

3- Мавзу: Геометрик масалаларни ечиш методлари хақида. Геометрик масалаларнинг турлари. Ўлчаш билан боғлиқ амалий масалалар, ҳисоблашга доирмасалалар

Режа:

1. Геометрик масалалар ва уларнинг турлари.
2. Амалий масалалар ва уларни ечиш методлари.
3. Ҳисоблашга доир масалалар ва уларни ечиш усуллари.
4. Исботлашга доир масалалар ва уларни ечиш усуллари.

Адабиётлар: (10), [11], [12], [13].

Математиканинг бошқа бўлимлари каби геометрия бўлимида олинган назарий ва амалий билимларни мустаҳкамлаш ва малака ҳосил қилиш учун уни амалда қўллай билиш зарурий шартдир. Шунинг учун геометриянинг ҳар бир бўлими мавзусидан сўнг уни масалалар ечиш билан мустаҳкамлаш ва малака, кўникма ҳосил қилиш керак.

Геометрияда масалалар амалий машқлар билан ҳал қилинадиган масалалар, ҳисоблашга доир масалалар, исботлашга доир масалалар ва ясашга доир масалаларга бўлинади.

Амалий машқлар билан ҳал қилинадиган масалалар асосан чизғич ва транспортир каби ўлчаш асбоблари билан ҳал қилинадиган масалалардир. Бундай масалалар асосан бошланғич синф ва 5-6- синфларда берилади.

Масалан: берилган икки кесма узунликлари йиғиндисига тенг бўлган битта кесмани топиш. Кесмаларни бирини иккинчисидан узун ёки қисқа эканлигини аниқлаш.

Ҳисоблашга доир масалалар геометрия курсини ҳар бир бўлимида мавжуд бўлиб, бундай масалалар геометриядан олган назарий билимларга, ўрганилган формула ва хоссаларга асосланиб геометрик фигураларнинг бирон катталикларини берилган элементлари катталикларига асосан топишга доир масалалардир. Масалан: учбурчакнинг баландлиги ва асосига кўра, ёки тўғри бурчакли учбурчакнинг катталикларига кўра, ёки томонлари орасидаги муносабатлардан фойдаланиб унинг юзасини периметрини бошқа номаълум элементини топишга доир масалалар.

Худди шунингдек радиусга кура айлана узунлигини $S=2\pi R$ оркали доирани юзини $S=\pi R^2$ орқали ёки бу формулалардан узунлигига кўра радиусини топишга доир масалалар ҳал қилинади.

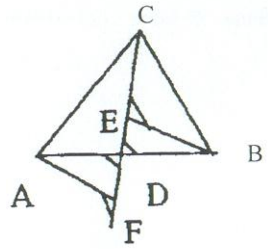
Исботлашга доир масалаларни ечиш. Бундай масалаларни ҳал қилишда математика ўқитиш методикасининг дедукция ва индукция методларидан фойдаланилади. Бунда масаланинг шартидан нима маълум, берилган эканлиги аниқланади. Сўнгра нимани келтириб чиқариш кераклиги аниқланади. Агар масаланинг шарти А бўлса, у ҳолда В бўлади жумласидан $A \rightarrow B$ аниқланади.

Масала. Учбурчакнинг бирон учидан унинг қаршисидаги томонга ўтказилган медианаси, учбурчакнинг қолган икки учидан баробар узоқликда ётишини исботланг.

Берилган: ABC да CB медиана.

Исбот қилиш керак: CO медиана бўлгани учун AO = OB бўлади.

$\angle ADF = \angle BDE$ (вертикал бурчак бўлгани учун).



Δ ADF ва Δ BDE лар тўғри бурчакли учбурчак бўлгани учун, тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглик аломатига кўра Δ ADF = Δ BDE бўлади. Бундан, тенг учбурчакларда тенг бурчаклар қаршисида тенг томонлар ётиши шартидан AF = BE эканлиги келиб чиқади.

Бундай масалани ечишда нуқтадан тўғри чизиққа бўлган масофани тўғри тушуниши масалани ечимини топишга кўрсатма бўлади. Ясашга доир масалаларни ечиш бу алоҳида мавзу бўлиб, уни циркулғ ва чизғич ёрдамида масалалар ечишда кўрамиз.

Саволлар:

1. Геометрик масалалар ва уларнинг турлари ҳақида маълумот беринг.
2. Амалий масалалар қандай методлар билан ечилади?
3. Ҳисоблашга доир масалалар ва уларни ечиш усулларига мисол келтиринг.
4. Исботлашга доир масалалар ва уларни ечишга мисол келтиринг.

4- Мавзу: Геометрик фигураларни циркул ва чизғич ёрдамида ясаш

Режа:

1. Геометрик масалаларнинг турлари ҳақида:

а) Ҳисоблашга доир масалалар;

б) Исботлашга доир масалалар;

в) Ясашга доир масалалар.

2. Ясашга доир масалаларни ечишда қўлланиладиган қуроллар ва уларнинг аксиомалари;

3. Ясашга доир геометрик масалаларни ечишдаги асосий босқичлар.

Адабиётлар: [10], [11], [12], [15].

1. Геометрик масалаларнинг турлари ҳақида.

Геометрик масалалар асосан берилиши ва нимани топишга қаратилганлигига қараб 3 турга бўлинади:

Биринчиси – ҳисоблашга доир масалалар.

Бундай масалалар турмушда кўп учрайдиган, геометрик фигураларга таалуқли бўлган, у фигуранинг бирор элементини топишга ёки унинг юзасини, ҳажмини топишга доир масала киради. Иккинчиси исботлашга доир масалалар;

Бундай масалаларга ўрганилган геометрик фигуралар, уларнинг хоссалари, аломатлари ёки улар орасидаги муносабатларига кўра назарий жиҳатдан асослашга доир масалалар киради.

Учинчиси – геометрик фигуралар ёки уларнинг элементларини геометрик ясаш қуроллари ёрдамида ясашга доир масалалар киради. Бундай масалаларни ечишда ўрганилган геометрик назарияларни кетма-кет қўллаб ясашга доир геометрик масалалар ҳал қилинади. Ясашга доир геометрик масалаларни «конструктив масалалар» дейилади ва геометриянинг бу қисмини ўрганиладиган бўлимини «конструктив геометрия» деб аталади. Конструктив геометриянинг асосий ясаш қуроли чизғич ва циркулдир. Бу қуролларни ишлатишда асосан қуйидаги, уларнинг имкониятларини эътиборга олиб тузилган аксиомалари мавжуд:

1. Берилган икки нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. (Чизғич аксиомаси).

2. Берилган маркази ва радиусига кўра U (o, r) айланани ясаш мумкин. (Циркулғ аксиомаси).

3. Икки тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасини топиш мумкин, агар улар кесишадиган бўлса. (Чизғич аксиомаси).

4. Икки айлананинг кесишган нуқталарини топиш мумкин, агар улар умумий нуқтага эга бўлса. (Циркулғ аксиомаси).

5. Берилган тўғри чизиқ ва айланаларнинг кесишган нуқталарини топиш мумкин, агар улар кесишса. (Чизғич ва циркулғ аксиомаси).

Ясашга доир масалаларни ечишда бу аксиомалар чекли марта қўлланилади. Геометриянинг фигураларни ясашга доир қисми анча мураккаб ва кенг соҳа бўлиб, бу устида чет эл геометрларидан Италия геометри Маскерони 1797 йилда, немис олими Якоб Штейнер 1833 йилда, Адлер 1890 йилларда ўзларининг ахборотларида ҳар бир ясаш қуролининг аҳамияти ҳақида мукаммал фикр юритиб, уларни ҳар бири ва уларни ўрнини босувчи бошқа асбобларни таърифлаганлар ва табақаларга ажратганлар. Француз математиги Адамар элементар геометрия курсида шундай деб ёзади:

«Геометрик ясашлар деган сўздан чизғич ва циркулғ ёрдами билан бажариладиган ясашларни тушунилади».

Бу олимлар геометрик ясаш қуроллари сафига икки томонли чизғич, тўғри ёки ўткир бурчак, гўния каби асбобларнинг моҳияти устида ҳам фикр юритадилар.

Ўрта Осиёлик олимлардан Умар Хайём (1048-1030), Насриддин Тусий (1201-1274), Бағдод математиги Абул Ҳасан Собит ибн Карра (836-901), Абул-Вафо Муҳаммед ал-Буздакони (940-988), Сиджизи (951 -1024), ал Кухи (Х аср), Муҳаммад ибн ал-Ҳусайн (XII аср) чизмачиликнинг такомиллаштириши ва чизмачилик асбоблари ҳақида, ясашга доир тарихий масалаларнинг ечими ҳақида рисолалар яратганлар.

(Физико-математические науки в странах Востока I вкпуск).

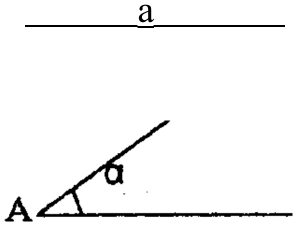
3. Ясашга доир геометрик масалаларни ечишдаги асосий босқичлар.

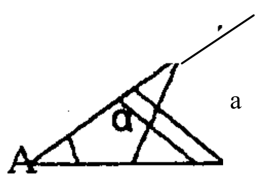
Ясашга доир геометрик масалаларнинг берилишига қараб, унинг ечими мавжудми, ёки йўқми, деган савол туғилади.

Бу саволга жавобни айрим масалаларда, айниқса, шу масалани ечишда қўлланиладиган усул ёки кетма-кетлик аниқ ва содда бўлса, олдиндан айтиш мумкин.

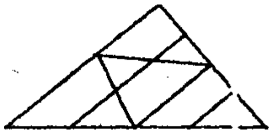
Масалан: а томони ва унинг қаршисидаги А бурчаги бўйича ∇ ясаш талаб қилинсин.

Бундай масаланинг шарти етарли эмас, лекин бу берилган шартларни қаноатлантирувчи ечим чексиз кўп эканлигини айтиш мумкин. Шунинг учун бу масаланинг ечими аниқ эмас дейилади.





Ёки: Масалан: 3 та бурчагига кўра Δ ясаш? Ҳар бир Δ ечим бўла олди. Демак аниқ эмас.



Бундай масалаларда албатта ҳеч бўлмаса, 1 та чизиқли элемент берилиши керак, бу шарт Δ ни тўла аниқлайди.

Бу масаладан кўринадики, ясашга доир масалаларни ечишда ўзига хос хусусият мавжуд экан. Бу хусусият бундай масалаларни ечишдаги асосий босқичлардир

Асосий босқичлар:

1. Анализ босқичи.
2. Ясаш босқичи.
3. Исботлаш босқичи.
4. Текшириш босқичи.

Анализ босқичи – бу босқичда «масала ечилди», деб фараз қилиб, сўралган фигуранинг тахминий чизмаси чизилади ва ундаги масаланинг шартида берилган элементлар аниқланади, сўнгра улар орқали сўралган фигуранинг асосий элементлари орасидаги боғланиш аниқланади. Кейин берилган элементларга кўра, сўралган фигурани ясаш плани тузилади. Бу босқич ижодий босқич деб аталади, чунки тузилган план асосида сўралган фигурани бемалол ясаш мумкин.

Ясаш босқичи – бу босқич ижро этиш босқичи деб аталиб, анализ босқичида тузилган план асосида сўралган фигура ясалади (циркулғ ва чизғич ёрдамида).

Исботлаш босқичи – бу босқичда ясалган фигура масаланинг шартларини қаноатлантириши асосланади.

Текшириш босқичи – бу босқичда қуйидаги саволларга жавоб бериш керак бўлади:

1. Масала доим ечимга эгами ёки ечимга эга бўлмаган ҳол ҳам борми?
2. Агар масала ечимга эга бўлса, қачон нечта ечимга эга эканлиги аниқланади.

Бу босқичлар масаланинг тўла ҳал қилинишини тахминлайди. Берилган масаланинг содда ва мураккаблигига қараб айрим босқичларни оғзаки ҳам бажариш ёки бажармаслик мумкин бўлади. Лекин 4та босқичга тўла эътибор бериш керак бўлади. Ясашга доир масалаларни ечишда кўп қўлланиладиган бир қанча элементар масалалар мавжуд. Масалан:

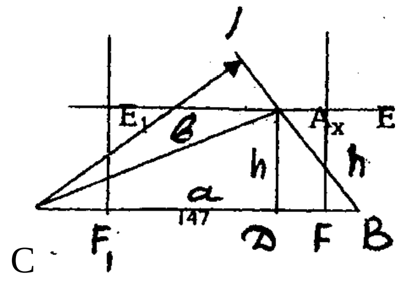
1. Кесмага тенг кесма ясаш.
2. Бурчакка тенг бурчак ясаш.
3. 3 томонига кўра учбурчак ясаш.
4. Икки томони ва улар орасида бурчагига кўра учбурчак ясаш.
5. Бир томон ва унга ёпишган икки бурчагига кўра учбурчак ясаш.
6. Бурчак биссектрисасини ясаш.
7. Кесмани тенг иккита бўлиш.
8. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш ва хоказо.

Ясашга доир масалаларни ечишда бундай элементар масалалар чекли марта такрорлаб қўлланилиши мумкин.

Масала. Асоси, бир ён томони ва баландлигига кўра учбурчак ясанг.

Берилган: _______a_____ ________в ________h_a

1- босқич. Анализ.



$L \cap \cup = A_x$

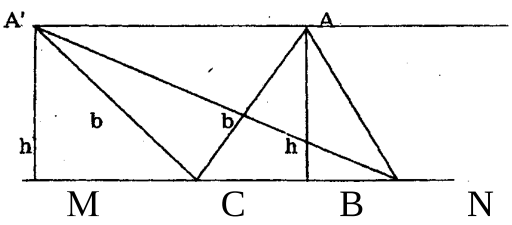
Режа:

1. MN тўғри чизиқда a кесма ясалади. —B,C учлар топилади;
2. A учи асосидан h масофада б-у EF ⊥BC ўтказамиз;
3. EF=h белиланади. E — нуқта топилади;
4. Худди шунингдек E_1,F_1=h_1 E_1—топилади;
5. E,E_1—ўтказилади. I — тўғри тизиқ топилади;
6. Маркази C нуқтада, радиуси в га тенг бўлган U(0,2) айлана ясалади, натижада $L \cap \cup = A_x$ нуқта топилади.
7. ΔABC ясалади.

III босқич. Исботи.

Ясалишига кўра Δ ABC нинг асоси a га, ён томони в га, баландлиги h га тенг бўлади.

IV босқич. Текшириш.



h<b бўлса, A топилмайди, ечими йўқ.

h=b бўлса, 1 та ечимга эга.

h>b бўлса, 2 та ечимга эга.

Изланган ΔABC ва $A'BC$ бўлади.

Саволлар:

1. Геомерик масалаларнинг турлари ҳақида маълумот беринг.
2. Ясашга доир масалаларни ечишда қўлланадиган асбобларнинг аксиомаларини айтинг.
3. Ясашга доир масалани ечиш босқичларини айтинг ва энг содда масалаларни санаб ўтинг.
4. Шундай содда масалалардан бирини ечиб кўрсатинг.

5- Мавзу: Кўпёқлилар

РЕЖА:

1. Геометриянинг стереометрия қисми ва унинг аксиомалари.
2. Тўғри чизиқ ва текисликларнинг перпендикулярлиги (мустақил ўқиш).
3. Кўпёқли бурчаклар.
4. Кўпёқлар: призма, параллелепипед, пирамида.
5. Мунтазам кўпёқлар.

Адабиётлар: [10],[11],[12],[13].

Стереометрия геометриянинг фазовий фигураларини ўрганадиган қисмидир. Геометриянинг ўзига хос аксиомалари мавжуд. Бу аксиомалари қуйидагилардан иборат:

1.Текислик қандай бўлмасин, шу текисликка тегишли нуқталар ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.

2.Агар иккита турли текислик умумий нуқтага эга бўлса, улар тўғри чизиқ бўйича кесишади;

3.Агар иккита турли тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса, улар орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Бу аксиомалардан ва планиметриянинг айрим аксиомаларини мулоҳаза қилган ҳолда қуйидаги натижаларни келтириб чиқарилади:

1-теорема. Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

2-теорема. Тўғри чизиқнинг иккита нуқтаси текисликка тегишли бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг ўзи ҳам текисликка тегишли бўлади.

3-теорема. Текислик билан унда ётмайдиган тўғри чизиқ ё кесишмайди, ёки битта нуқтада кесишади.

4-теорема. Битта тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Тўғри чизиқ ва текисликларнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги. **Таъриф.** Фазодаги икки тўғри чизиқ бир текисликда ётса ва кесишмаса, улар параллел тўғри чизиқ дейилади. Кесишмайдиган ва битта текисликда ётмайдиган тўғри чизиқлар айқаш тўғри чизиқлар дейилади.

1-теорема. Тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқтадан шу тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.

2-теорема. Учинчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ параллелдир.

3-теорема. Агар текисликда ётмаган тўғри чизиқ шу текисликдаги бирор тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда у текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлади.

Таъриф. Агар икки текислик кесишмаса, улар **параллел** дейилади.

4-теорема. Икки текисликдан бири иккинчи текисликда ётган кесишувчи иккита тўғри чизиққа параллел бўлса, бу икки текислик параллел бўлади.

5-теорема. Текисликдан ташқаридаги нуқта орқали берилган текисликка параллел қилиб битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

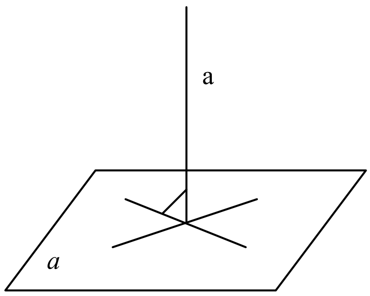
6-теорема. Агар иккита параллел текислик учинчи текислик билан кесишса, у ҳолда кесишиш тўғри чизиқлари параллел бўлади.

7-теорема. Иккита параллел текислик орасига жойлашган параллел тўғри чизиқларнинг кесмалари тенг.

Таъриф. Текисликдагидек, тўғри бурчак остида кесишган икки тўғри чизиқ перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади.

1-теорема: Перпендикуляр тўғри чизиқларга параллел бўлган кесишувчи тўғри чизиқларнинг перпендикулярдир.

Таъриф. Агар текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ текисликдаги шу кесишув нуқтасидан ўтувчи исталган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр дейилади.



2- теорема. Агар текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ текисликдаги шу кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлади.

3- теорема. Агар текислик иккита параллел тўғри чизиқдан бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда иккинчисига ҳам перпендикулярдир.

4- теорема. Битта текисликка перпендикуляр икки тўғри чизиқ ўзаро параллелдир.

5- теорема. (Уч перпендикуляр ҳақидаги теорема) Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикулярдир. Аксинча, текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у оғманинг ўзига ҳам перпендикулярдир.

Таъриф. Кесишувчи иккита текисликнинг кесишган тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган учинчи текислик уларни перпендикуляр тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтса, бу икки текислик перпендикуляр текисликлар дейилади.

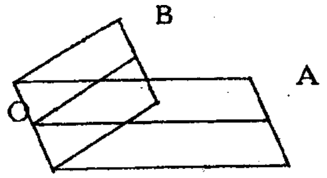
6-теорема. Агар текислик бошқа бир текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтса, бу текисликлар перпендикулярдир.

7-теорема. Иккита перпендикуляр текисликнинг бирида ётувчи тўғри чизиқ шу текисликлар кесишган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, иккинчи текислик ҳам перпендикуляр бўлади.

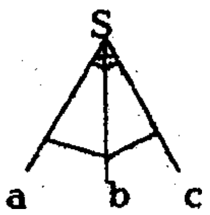
Таъриф. Икки айқаш тўғри чизиқнинг умумий перпендикуляри деб учлари шу тўғри чизиқларда бўлиб, уларнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлган кесмага айтилади.

Айқаш тўғри чизиқларнинг умумий узунлиги улар орасидаги масофа дейилади.

Кўпёқли бурчаклар.

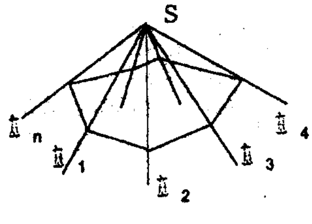


Иккита ярим текислик ва уларни чегаралаб турган умумий тўғри чизиқдан ташкил топган фигура икки ёқли бурчак дейилади. Ярим текисликлар икки ёқли бурчакларнинг ёқлари, уларни чегараловчи тўғри чизиқ эса икки ёқли бурчакнинг қирраси дейилади. AOB бурчак икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги дейилади. Икки ёқли бурчакнинг катталиги унинг икки ёқли бурчаги катталиги билан



Учта ясси бурчакдан ташкил топган фигура уч ёқли бурчак дейилади. S – учёқли бурчакнинг учи дейилади.

Агар бундай, яъни битта умумий учга эга бўлган текисликлар (ёқлар) кўп бўлса, бундай фигурани кўпёқли бурчак дейилади.



Кўпёқлилар.

Чекли миқдордаги текисликлар билан чегараланган жисм кўпёқ дейилади. Кўпёқнинг чегараси унинг сирти дейилади.

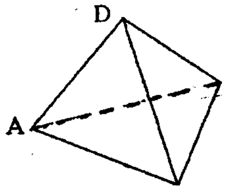
Агар кўпёқни ўзи уни чегараловчи текисликларнинг ҳар биридан бир томонда ётса, бундай кўпёқ қавариқ кўпёқ дейилади.

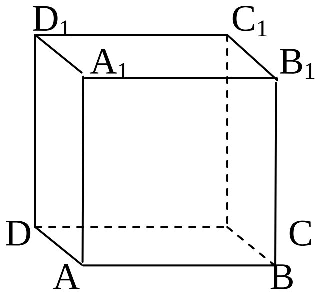
Кўпёқлардаги

A, B, C, D,.. -кўпёқнинг учлари

AB, BC, AD,.. -кўпёқнинг қирралари

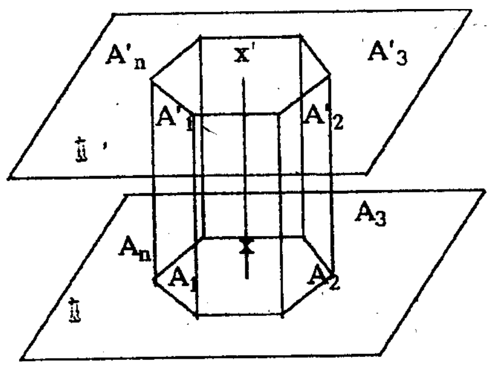
ΔABC, ΔABO, ΔACO, $ABCD$, ABA_1D_1 -кўпёқнинг ёқлари дейилади.





Бизга маълум бўлган кўпёқлар: призма, параллелепипед, пирамидалардир.

Призма деб иккита параллел текислик орасига жойлашган барча параллел тўғри чизиқлар кесмаларидан тузилган кўпёққа айтилади. Бу кесмалар шу текисликлардан бирида ётган ясси кўпбурчакни кесиб ўтади. Призманинг параллел текисликларда ётган ёқлари призманинг асослари дейилади. Бошқа ёқлари призманинг ён ёқлари дейилади. Ён ёқлар параллелограмлардан иборат бўлади.



A_1, A_2—призманинг учлари

A_1 A'_1, $A_2A'_2$ - призманинг ён қирралари

$A_1A_1A_2A_2$— призманинг ён ёқлари

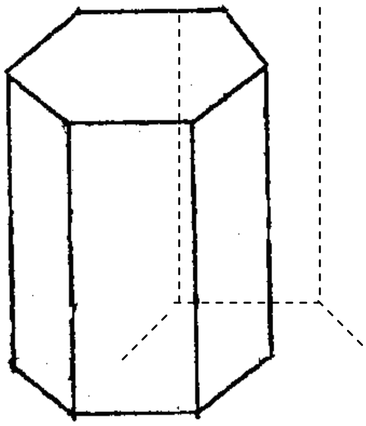
$A_1A_2A_3...A_n$ ва A'_1 A'_2 A'_3... A'_n—призманинг асослари дейилади.

Призманинг асослари орасидаги масофа унинг баландлиги дейилади. Призманинг икки асосидаги бир ён ёққа тегишли бўлмаган учларини туташтирувчи кесмалар призманинг диоганали дейилади. Агар призманинг ён қирралари асосларига перпендикуляр бўлса, уни тўғри призма дейилади. Акс ҳолда оғма призма дейилади.

Асослари мунтазам кўпбурчак бўлган тўғри призма мунтазам призма дейилади.

Призма ён ёқлари юзларининг йиғиндиси призманинг ён сирти дейилади.

1-теорема. Тўғри призманинг ён сирти асосининг периметри билан баландлигининг, яъни ён қирраси узунлигининг кўпайтмасига тенг.



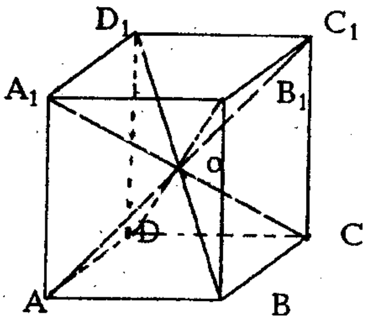
Параллелепипед.

Призманинг асоси параллелограмм бўлса, бундай призма параллелопипед дейилади.

Параллелепипеднинг умумий учга эга бўлмаган ёқлари қарама-қарши ёқлар дейилади.

ABB_1A ва DCC_1D — қарама-қарши ёқлари.

CC_1B_1 ва ADD_1A_1— қарама-қарши ёқлари.



2-теорема. Парадлелепипеднинг қарама-қарши ёқлари параллел ва тенг.

3-теорема. Параллелепипеднинг диоганаллари бир нуқтада кесишади ва кесишган нуқтасида тенг иккига бўлинади.

Параллелепипед диоганалларининг кесишган нуқтаси "О" унинг симметрия маркази бўлади.

Асоси тўғри бурчакдан иборат бўлган параллелепипед тўғри бурчакли параллелопипед дейилади.

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳамма ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлади.

Ҳамма қирралари тенг бўлган параллелепипед куб дейилади.

4-теорема. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг исталган диагоналининг квадрати унинг учта чизиқли ўлчови квадратларининг йиғиндисига тенг.

Берилган:

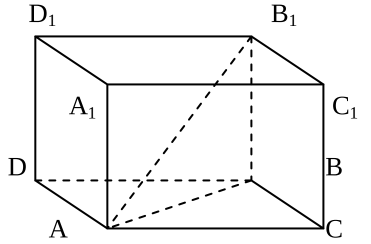
$ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ -тўғри бурчакли параллелепипед.

Исбот қилиш керак: $AC_1^2=AB^2+BC^2+CC_1^2$

Исботи: Шаклда ΔABC дан Пифагор теоремасига кўра:

$AC^2=AB^2+BC^2$ ΔACC_1 дан: $AC_1^2=AC^2+CC_1^2$.

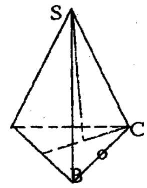
$AC_1^2=AB^2+BC^2+CC_1^2$. Теорема исботланди.



Пирамида.

Пирамида деб, берилган нуқтани ясси кўпбурчакнинг нуқталари билан туташтирадиган барча кесмалардан ташкил топган кўпёққа айтилади.

S — пирамиданинг учи. ΔABC — пирамиданинг асоси.



ΔSAB, SBC, SAC – пирамиданинг ён ёқлари

SA, SB, SC – пирамиданинг ён қирралари.

SO – пирамиданинг баландлиги дейилади.

Учбурчакли пирамида тетраэдр ҳам дейилади.

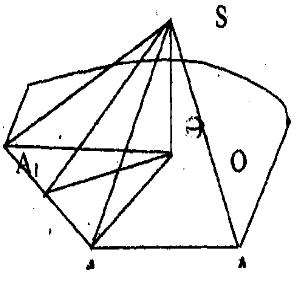
5-теорема. Пирамиданинг асосига параллел ва уни кесиб ўтадиган текислик шу пирамидага ўхшаш пирамида ажратади.

6-теорема. Мунтазам пирамиданинг ён сирти периметрининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенг.

$A_1A_2= A_2A_3=... = a$, бўлса, томонлар сони n та бўлсин.

$S_{ён}= \Theta\ a/2\ x\ n = a\ x\ n\ x\ \Theta/2 =a\ x\ n /2\ x\ \Theta = P\ \Theta\ /\ 2$;

Θ - апофема.



Мунтазам кўпёқлар.

Агар қаварик кўпёқларнинг томонлари сони бир хил бўлган мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлса ва шу билан бирга кўпёқнинг ҳар бир учида бир хил миқдордаги қирралар учрашса, бундай қаварик кўпёқ мунтазам кўпёқ дейилади. Бундай кўпёқлиларга мунтазам тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр ва икосаэдрлар киради.

Бизга таниш бўлмаган октаэдр ёқлари мунтазам учбурчаклар бўлиб, ҳар бир учида тўртта қирра учрашади.

Додекаэдр – ёқлари мунтазам беш бурчаклардан иборат, унинг битта учида учта қирра учрашади.

Икосаэдр – ёқлари мунтазам учбурчаклардан иборат бўлиб, унинг ҳар бир учида бештадан қирра учрашади.

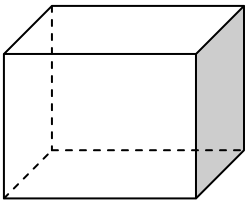
Кўпёқлилар ҳақида Эйлер теоремаси.

Эйлер ўзининг қавариқ кўпёқлилар устида ўтказган илмий изланишлари натижасида уларнинг учлари сони – **а**, қирралари сони – **в** ва ёқлари сони – **с**лар орасидаги муносабатни қуйидаги тенглик орқали ифодалайди: қавариқ кўпёқларнинг қирралари сони учлари ва ёқлари сонида 2 та камдир.

а+с-в=2

Мисол. Кубда Эйлер теоремасини кўрайлик.

$$\left.\begin{aligned} a &= 18 \\ b &= 12 \\ c &= 6 \end{aligned}\right\} \qquad 8+6-12=2$$



Саволлар:

1. Стереометрия аксиомаларини айтинг.
2. Фазода тўғри чизиқ ва текисликларнинг параллеллик перпендикулярлик шартлари қандай?
3. Кўпеқли бурчак таърифини айтинг.
4. Призма, параллелопипед, пирамида таърифлари ва уларнинг асосий элементларини айтинг.
5. Мунтазам кўпёқлилар таърифи ва асосий турларини айтинг.

6- Мавзу: Айланма жисмлар. Цилиндр, конус, шар

РЕЖА:

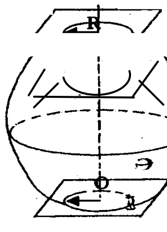
1. Айланма жисм, айланма сирт ҳақида тушунча.
2. Цилиндр ва унинг элементлари.
3 Конус ва унинг элементлари.
4. Шар, унинг элементлари ва бўлаклари.

Адабиётлар: [10], [11], [12].

Айланма жисм ва айланма сирт ҳақида тушунча, Бирор эгри чизиқни ёки тўғри чизиқни бир тўғри чизиқ атрофида айлантаришдан айланма сирт ҳосил бўлади. Агар уни ўқ деб аталувчи тўғри чизиққа перпедикуляр бўлган параллел икки текислик билан кесилса, айланма сирт ва доира билан чегараланган айланма жисм ҳосил бўлади.

OS — айланма жисмнинг ўқи дейилади.

Бу жисмнинг сирти — эгри сирт айланма сирт дейилади.



O_1

Параллел текисликларда ҳосил
бўлган кесим доира шаклида бўлади.
О O_1 Доираларнинг маркази бўлади.

Цилиндр.

Ўқ атрофида унга параллел бўлган тўғри чизиқ айлантирилса, цилиндрик сирт ҳосил бўлади.

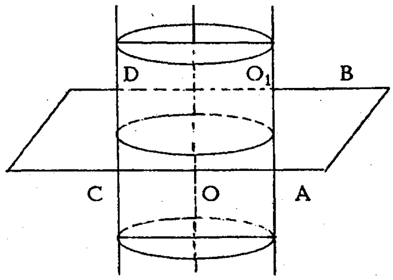
Уни ўққа перпендикуляр иккита параллел текисликлар билан кесилса, улар орасида цилиндрик жисм ҳосил бўлади.

Θ – цилиндр ясовчиси.

Θ O_1 – цилиндирнинг ўқи, баландлиги

Э – тўғри чизиқнинг траекторияси цилиндрнинг ён сиртини ясайди.

Θ S



Текисликларда ҳосил бўлган доиралар цилиндрнинг асослари дейилади.

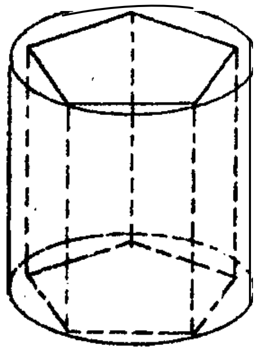
Цилиндр асосининг радиуси цилиндрнинг радиуси дейилади.

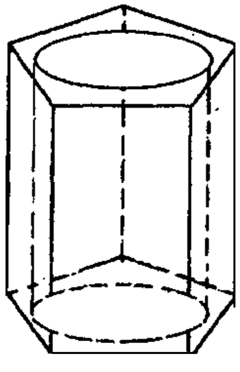
Цилиндр ўқи орқали ўтувчи текислик кесими цилиндрнинг ўқ кесими дейилади. Цилиндрнинг ясовчиси орқали ўтиб, бу ясовчи орқали ўтадиган ўқ кесимга перпендикуляр текислик цилиндрнинг уринма текислиги дейилади.

1- теорема. Цилиндр ўқига перпендикуляр текислик унинг ён сиртини асос айланасига тенг айлана бўйича кесади. Бу теоремани текисликни асосга устма-уст тушириш орқали исбот қилинади.

Цилиндрга ички чизилган призма деб, шундай призмага айтиладики унинг асослари цилиндрнинг асосларига ички чизилган тенг кўпбурчаклардан иборат.

Унинг қирралари цилиндр ясовчилари бўлади.





Цилиндрга ташқи чизилган призма деб, шундай призмага айталадики, унинг асослари цилиндр асосларига ташқи – чизилган тенг кўпбурчаклардан иборат бўлади. Унинг ён ёқлари текисликлари цилиндрнинг ён сиртига уринади.

Конус

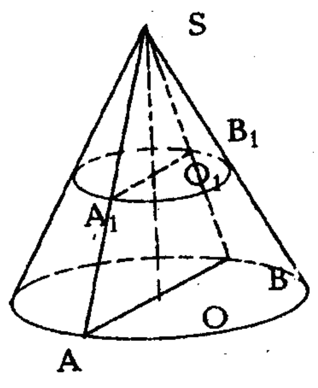
Конус деб шундай жисмга айтиладики, у берилган нуқтани бирор доира нуқталари билан туташтирувчи ҳамма кесмалардан ташкил топган бўлиб, берилган нуқта конус учи, доира эса конус асоси дейилади. Конус учини асос айланаси нуқталари билан туташтирувчи кесмалар конуснинг ясовчилари дейилади. Конуснинг сирти асосидан ва ён сиртидан иборат. Агар конус учидан унинг асосига туширилган перпендикуляр унинг марказига тушса, бундай конусни тўғри конус дейилади.

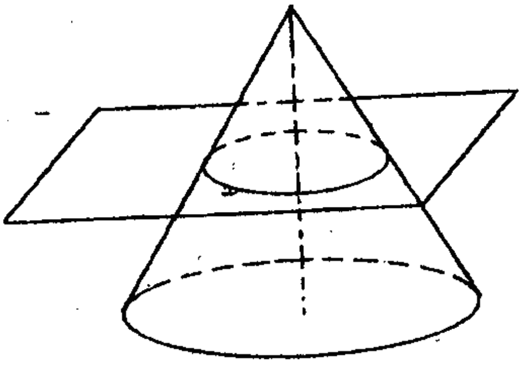
Конуснинг учидан асосига туширилган перпендикуляр конуснинг баландлиги дейилади. Тўғри конуснинг баландлигидан ўтувчи тўғри чизиқ конуснинг ўқи дейилади. Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесим ўқ кесим дейилади. Конуснинг ясовчиси орқали ўтувчи ва бу ясовчи орқали ўтказилган ўқ кесимга перпендикуляр текислик конуснинг уринма текислиги дейилади. Шаклдан: ABS учбурчак конуснинг ўқ кесими.

2-теорема. Конуснинг ўқига перпендикуляр текислик конусни доира бўйича кесади, ён сиртини эса, маркази конуснинг ёғида жойлашган айлана бўйича кесиб ўтади.

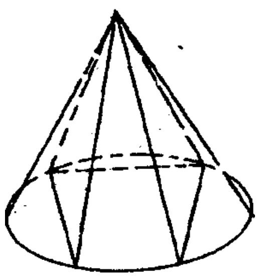
Текисликни асос текислиги билан устма-уст туширувчи конус учига нисбатан гомотетик. алмаштириш конуснинг текислик билан кесимини конуснинг асоси билан устма-уст туширади.

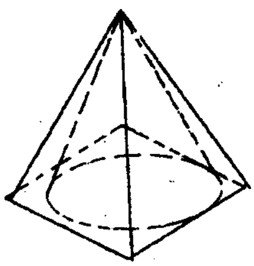
Демак конуснинг текислик билан кесими доира бўлиб, ён сиртининг кесим маркази конус ўқида жойлашган айланадир.





Конуснинг ўқига перпендикуляр текислик билан кесилса, уч томонидан кичик конус ажралади, пастда қолган қисми эса, кесик конус дейилади.





Асоси конус асосидаги айланага ички чизилган кўпбурчак бўлиб, учи эса конуснинг учида бўлган пирамида конусга ички чизилган пирамида дейилади.

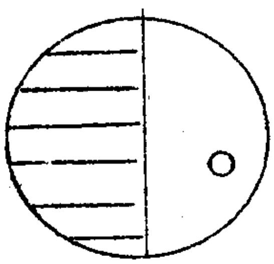
Асоси конуснинг асосига ташқи чизилган кўпбурчак бўлиб, учи эса конуснинг учи билан устма-уст тушган пирамида конусга ташқи чизилган пирамида дейилади. Ташқи чизилган пирамида ён ёқларининг текисликлари конуснинг уринма текисликлари бўлади.

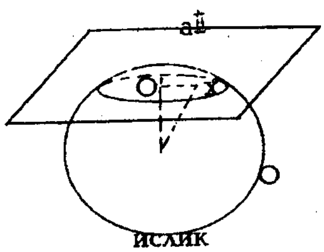
Шар

Таъриф. Фазонинг берилган нуқтасидан берилган масофадан катта бўлмаган узоқликда ётган ҳамма нуқталаридан иборат қисми шар дейилади.

Берилган нуқта шар маркази, берилган масофа шарниг радиуси дейилади. Шарнинг чегараси шар сирти ёки сфера деб аталади. Шар марказидан ўтувчи ва шар сиртининг икки нуқтасини туташтирувчи кесма шар диаметри дейилади.

Ярим доирани унинг диаметри атрофида айлантириш натижасида хам, шар ҳосил бўлади.





3-теорема. Шарнинг ҳар қандай текислик билан кесими доирадир. Бу доиранинг маркази шарнинг марказидан кесувчи текисликка туширилган перпендикулярнинг асосидир.

Шаклдан: а – кесувчи текислик. О – шар маркази.

$OO'\perp \overline{\text{II}}$ ўтказамиз. X – нуқтанинг текисликнинг шарга тегишли нуқтаси бўлсин. Пифагор теоремасига кўра $OX^2=OO'^2+O'X^2$

лекин OX≤R -бўлгани учун $o'x\geq\sqrt{R^2-OO'^2}$

Демак O' нуқта радиуси $\sqrt{R^2-OO'^2}$ бўлган доирага тегишлиги. Демак шарнинг $\overline{\text{II}}$ текислик билан кесими маркази O' нуқтада бўлган доира демакдир. Шарнинг текислик билан кесими доира бўлиб, унинг радиуси $R=\sqrt{R^2-OO'^2}$ формула билан хисобланади.

Бундан шар марказидан бир хил узоқликдаги кесимлари тенг доиралардан иборат бўлади. Текислик марказга яқинлашиб борса, кесим доиралар ҳам катталашиб боради. Шар марказидан ўтувчи кесим энг катта доира бўлиб, унинг радиуси доира радиусига тенгбўлади.

4-теорема. Шарнинг исталган диаметриал текислиги унинг симметрия текислиги бўлади. Шарнинг текислиги унинг симметрия текислиги бўлади. Шарнинг маркази унинг симметрия марказидир.

5-диаметриал текислик.

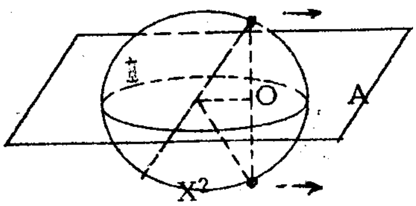
х-шарнинг ихтиёрий нуқтаси.

5 текисликка нисбатан х нуқтага симметрик нуқтани (x^1) ясаймиз.

$XX^1 \perp \alpha \Rightarrow XA = AX^1$

$\overline{\underline{\mathrm{II}}}$ $AOX = \overline{\underline{\mathrm{II}}}$ AOX^1 дан: $OX^1=OX$. $OX = R'$ келиб чиқиб X^1 нуқта шарга тегишлидир.

X



X_2 X_1

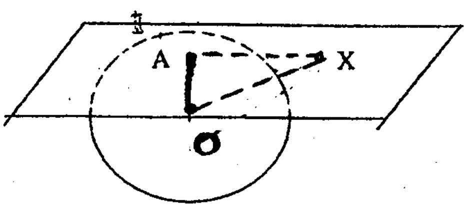
Энди X^2 нуқта шар марказига нисбатан X нуқтага симметрик нуқта бўлсин. У ҳолда $OX^2=OX \leq$, яъни X^2 нуқта шарга тегишли.

Шар сиртидаги нуқтадан ўтиб шу нуқтага ўтказилган радиусга перпендикуляр текислик уринма текислик дейилади. А нуқта уриниш нуқтаси дейилади.

5-теорема. Уринма текислик шар билан фақат битта умумий нуқтага – уриниш нуқтасига эга.

А – уриниш нуқтаси бўлсин.

$AO=R$ $x\overline{\underline{\mathrm{II}}}\,\Theta$ $AO\perp\overline{\underline{\mathrm{II}}}$ ОХ эса $\overline{\underline{\mathrm{II}}}$ текисликка оғма каби бўлади. У ҳолда $OX > OA = K \Rightarrow OX > R$.



Демак, Х нуқта шарга тегишли эмас. АХ тўғри чизиқ шарга уринма дейилади,

6-теорема. Шар сиртидаги исталган нуқтадан чексиз кўп уринма ўтади, уларнинг ҳаммаси шарнинг уринма текислигида ётади. А нуқтадан ўтувчи ҳар қандай уринма ОА радиусга $\perp$ бўлади, демак улар $\overline{\underline{\mathrm{II}}}$ текисликда ётади.

Сфера тенгламаси

Маркази, декарт координаталар системасида А (а;в;с) нуқтада бўлган, R радиусига тенг бўлсин. А нуқта билан сфера устидаги ихтиёрий нуқта орасидаги масофа $(x - a)^2 + (y-в)^2 + (z - c)^2$ га тенг. Бу масофа R га тенг бўлгани учун сфера тенгламаси $(x-a)^2 + (y-в)^2 + (z-c)^2 = R^2$ бўлади.

Агар сферанинг маркази декарт координаталар бошида ётса, унинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ бўлади.}$$

7-теорема. Иккита сферанинг кесишган чизиғи айланадир. Биринчи сферанинг маркази $O_1(a;o;o)$ да, радиуси R_1 бўлсин. Иккинчи сферанинг маркази $O_2(в;o;o)$ нуқтада, радиуси R_2 бўлсин. У ҳолда уларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиқ X ўқидан иборат бўлади. Сфераларнинг тенгламаси

$$(x-a)^2+y^2 + z^2 = R^2 \qquad (1)$$

$$(x-z)+ y^2 + z^2 = R_2^2 \qquad (2) \quad \text{бўлади.}$$

$$(x-a)^2-(x-z)^2= R_1^2 - R_2^2$$

$$x^2 -2ax + a^2 -x^2 + 2zx^2 -z^2= R_1^2 - R_2^2$$

$$2(в-a)x = R_1^2 - R_2^2 -a^2 + в^2 \qquad (3)$$

Бу тенглама текислигига параллел текислик тенгламаси бўлиб, у икки сферанинг кесишган чизиғини беради.

Саволлар:

1. Айланма жисм, айланма сирт ҳақида тушунча беринг.
2. Цилиндр ва унинг элементлари таърифини айтинг.
3. Конус ва унинг элементларини таърифланг.
4. Шар, унинг элементлари ва бўлакларини таърифланг.

7- Миқдорлар ва уларни ўлчаш.

Режа:

1. Миқдор тушунчаси.
2. Скаляр миқдорларнинг асосий хоссалари.
3. Миқдорларни ўлчаш тушунчаси.
4. Кесма узунлиги ва унинг ҳоссалари.
5. Кесманинг узунлигини ўлчаш.

Миқдор тушунчаси фавқат математика фанида қўлланиладиган асосий тушунчалардан биригина эмас, балки бошқа физика, химия каби фанларда қўлланиладиган тушунча ҳисобланади. Ҳар хил фанларда (битта фаннинг турли бўлимларида) турлича талқин қилинганлигидан, уларни тавсифлаш анча қийинчиликларга олиб келади. Лекин, математикада қуйидагича таърифлаймиз.

Таъриф. Объектлар ёки ходисаларга хос умумий хосса миқдор дейилади.

Таъриф. Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган миқдорлар бир жинсли аддитив –скаляр миқдорлар дейилади:

1). Ихтиёрий бир жинсли a ва b миқдорларни таққослаш мумкин, яъни $a = a$, $a>b$, $a<b$ муносабатлардан фақат биттаси бажарилади.

2). Ихтиёрий бир жинсли a ва b миқдорларни қўшиш мумкин, яъни $a+a = c$ (йиғинди
миқдор).

3). Миқдорни сонга кўпайтириш мумкин, яъни $b= xa,\ x \in R$.

4). Миқдорларни айириш мумкин, яъни $a=b+c$ шартни қаноатлантирадиган C миқдор a ва b миқдорларнинг айирмаси дейилади.

5) Бир жинсли миқдорларни бўлиш мумкин $\frac{a}{b} = x$.

Айтайлик a кесма $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, кесмаларга ажратилган деймиз, агарда a кесма уларнинг йиғиндисидан иборат бўлса ва ҳар бир иккитаси умумий ички нуқталарга эга бўлмаса. Агарда a кесма $a_1,\ a_2,\ ...,a_n$ кесмаларга ажратилган бўлса, уни шу кесмачаларнинг йиғиндиси дейилади.

Бирор e кесмани танлаймиз ва уни бирлик кесма ёки улчов бирлиги деб атаймиз. Агарда a кесмани n та қисмга ажратиш мумкин бўлса ва унинг ҳар бири e бирлик кесмага каррали бўлса, уни n улчов ёки a кесманинг e бирлик улчовдаги қиймати деймиз. a кесманинг e бирлик улчов бирлигидаги улчовини $m_e(a)$ деб белгилаймиз.

Кесма узунлиги қуйидаги хоссаларга эга:

а). Агар $a=b+c$ бўлиб, b ва c кесмаларнинг узунликлари натурал сонлар билан ифодаланса, у ҳолда a кесманинг узунлиги унинг қисмлари йиғиндисига тенг:

$$m(a) = m(b) + m(c)$$

лотинча қўшиш *additio* дейилгани учун кесма узунлигининг бу хоссаси аддитивлик хоссаси деб аталади.

б). Агарда a кесма e_1 кесмага каррали e_1 кесма эса e_2 кесмага каррали бўлса у ҳолда a кесма e_2 кесмага каррали бўлади ва $m_2(a) = m_1(a)\ m_2(e_1)$ тенглик ўринли бўлади. Тенгликнинг ўнг томонида $m_1(a)$ ва $m_2(e_1)$ ларнинг кўпайтмаси турганлиги учун б) хосса улчовнинг мулътипликативлик хоссаси дейилади (лотинча *multiplicatio* – “кўпайтириш”). Хосса натурал сонларни кўпайтириш ва янги ўлчов бирлигига ўтиш операциялари орасидаги боғланишни ифодалайди.

Саволлар:

1. Миқдор деганда нимани тушунасиз?
2. Скаляр миқдорлар деб қандай миқдорларга айтилади?
3. Скаляр миқдорларнинг қандай хоссаларини биласиз?
4. Миқдорлар қандай ўлчанади?
5. Кесма узунлиги нима ва унинг қандай хоссалари бор?
6. Кесманинг узунлигини улчаш деганда нимани тушунасиз?

8- Мавзу: КЕСМА УЗУНЛИГИ ВА УНИ ЎЛЧАШ

Режа:

1. Кесма тушунчаси.
2. Кесма узунлиги хоссалари.

3. Кесма узунлиги бирлигини алмаштириш.
4. Бошланғич синфда кесма тушунчаси.

Таъриф: Кесма узунлиги деб ҳар бир кесма учун қуйидагича аниқланган мусбат катталикка айтилади:

1) тенг кесмалар тенг узунликка эга;

2) агар кесма чекли сондаги кесмалардан иборат бўлса, унинг узунлиги бу кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Кесмалар узунликларини ўлчаш жараёнида кесмалар тўплашдан бирорта *е* кесма танлаб олинади ва у узунлик бирилиги учун қабул қилинади. *а* кесмада унинг охирларидан биридан бирин-кетин *е* га тенг кесмалар қўйилади. Агар *е* га тенг кесмалар *n* марта қўйилган бўлса ва охиргисининг учи *а* кесма учи билан устма-уст тушган бўлса, *а* кесма узунлигининг қиймати *n* натурал сон дейилади ва қуйидагича ёзилади: $a=ne$ Агар *е* га тенг кесмалар *n* марта қўйилган бўлиб, яна *е* кесмадан кичик кесма ортиб қолган бўлса, бу кесмага $e_1=\frac{1}{10}e$ га тенг кесмалар қўйилади. Агар улар роппа-роса *n* марта қўйилган бўлса, $a=n,n,e$ бўлади ва *а* кесма узунлигининг қиймати чекли ўнли каср бўлади. Агар бу жараёнларни чексиз марта давом эттирсак, *а* кесма узунлигининг қиймати чексиз ўнли каср бўлади. Шундай қилиб, танлаб олинган бирликда ҳар қандай кесманинг узунлиги мусбат ҳақиқий сон билан ифодаланади.

1. Танлаб олинган узунлик бирлигида ҳар қандай кесманинг узунлиги мусбат ҳақиқий сон билан ифодаланади ва ҳар бир мусбат ҳақиқий сон учун узунлиги шу сон билан ифодаланадиган кесма мавжуд.

Кесмалар узунликларининг яна қатор хоссаларини исботлаймиз.

2. Агар иккита кесма тенг бўлса улар узунликларининг сонг қийматлари ҳам тенг бўлади ва аксинча: агар иккита кесма узунлигининг сон қийматлари тенг бўлса, кесмаларнинг ўзлари ҳам тенг бўлади: $a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b)$

Агар кесмалар тенг бўлса, улар узунликларини ўлчашда *е* га тенг бирлик кесмани ва унинг улушини бир хил сон марта қўямиз. Демак тенг кесмалар узунликларининг қиймати бир хил бўлади.

3. Агар берилган кесма бир нечта кесманинг йиғиндиси бўлса, унинг узунлигининг сон қиймати бу кесмалар узунликлари сон қийматларининг йиғиндисига тенг бўлади ва аксинча: агар кесма узунлигининг сон қиймати бир нечта кесма узунликларининг сон қийматлари йиғиндисига тенг бўлса, кесманинг ўзи бу кесмалар йиғиндисига тенг бўлади:

$c=a+b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)+m_e(b)$

a ва *b* - кесмалар узунликлари, p/n ва q/n - уларнинг сон қийматлари. $a+b$ йиғиндининг қийматини ҳосил қилиш учун $1/n$ *е* га тенг *p* та кесма қўямиз, кейин яна шундай кесмалардан *q* тасини қўямиз. Натижада берилган кесмалар йиғиндисининг узунлиги p/n + q/n сон билан ифодаланишини топамиз.

$$a+b=p\cdot\frac{1}{n}e+q\cdot\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=(\frac{p}{n}+\frac{q}{n})e$$

4. Агар *a* ва *b* кесмалар узунликлари $b=xa$ муносабатни қаноатлантирсак (бунда *x* - мусбат ҳақиқий сон ва *а* кесма *е* бирликда ўлчанган), *b* кесма

узунлигининг сон қийматини *e* бирликда топиш учун *x* сонни *e* бирликда ўлчанган *a* кесманинг сон қийматига кўпайтириш етарли.

$$b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x m_e(a).$$

b=xa ва $a = \frac{p}{n}e$ бўлсин. У ҳолда $b = x\frac{p}{n}e = (x \cdot \frac{p}{n})e$, яони $m_e(b) = x \cdot m_e(a)$

$x \cdot \frac{p}{n}e$ кўпайтма *e* кесмани $x \cdot \frac{p}{n}$ марта қўйиш кераклигини билдиради, яони $(x \cdot \frac{p}{n})e = x \cdot \frac{p}{n}e = xa = b$

5. Узунлик бирлигини алмаштирганда янги узунлик бирлиги эски узунлик бирлигидан неча марта кичик бўлса, узунликнинг сон қиймати шунча марта ортади (камаяди).

Кесмалар узунликларининг исботланган хоссаларидан яна қуйидагилар келиб чиқади:

6. $c > a \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$

7. $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$

8. $x = a : b \Leftrightarrow x = m_e(a) : m_e(b)$

Бу хоссалар икки кесмани таққослашни ва улар устида бажариладиган амалларни бу кесмалар узунликларнинг мос сон қийматларини таққослашга ва улар устида амаллар бажаришга келтиришга имкон беради. Масалан:

12м<12,3*м*, чунки 12<12,3; 7.8 см + 3,2 см= 11 *см*; 17*3=51дм

Кесмалар узунликларини таққослашда, узунликларни қўшишда, айиришда ва бошқа амаллар бажаришда назарий қонун ошкормас ҳолда қўлланилади. *М:* «Бирининг узунлиги 1 дм, иккинчисиники ундан 1 см узун бўлган иккита кесма чиз» деган топшириқни бажаришда ўқувчи ҳар қандай мусбат сон учун узунлиги шу сон билан ифодаланадиган кесма мавжудлигидан ошкормас ҳолда фойдаланилади. Узунлиги 1 дм бўлган кесмалар чексиз кўп, лекин улар ҳаммаси ўзаро тенг.

Бошланғич синфда ҳам кесма узунлиги тўғрисида маолумот берилади. Сўнгра кесмалар узунликлари ўлчанади, уларни узунликлари ўзаро таққосланади. Синиқ чизиқлар тўғрисида тушунча киритилади. Синиқ чизиқлар узунликлари ҳақида дастлабки маолумотлар берилади.

НАЗОРАТ УЧУН САВОЛЛАР

1. Кесма узунлиги қандай ўлчанади?

2. Қуйидагилар бажарилганда кесма узунлигининг қиймати қандай ўзгаради:

а) узунлик бирлиги 4 марта камайтирилса;

б) узунлик бирлиги 5 марта орттирилса;

3. 32 км ни метр ва сантиметрларда ифодаланг?

4. Бошланғич синфда кесма тушунчаси қандай киритилади?

Таянч иборалар

Бирлик кесма, кесмаларни ўлчаш, узунлик бирлигини алмаштириш, тенг кесмалар, кесмаларни солиштириш.

АДАБИЁТЛАР
1. А.Худойбергенов. Математика Тошкент. 1980.
2. А.П.Стойлова, А.М.Пишкало Бошланғич математика курси асослари
3. Жумаева М.Е., Таджиева З.К. Бошланғич синфлардан математика ўқитиш методикаси. Т., 2005 й

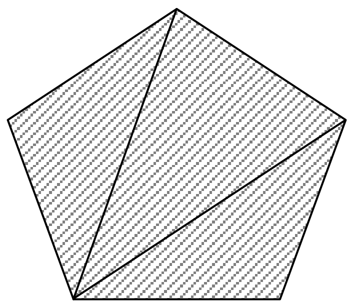
9- Мавзу. Фигураларнинг юзлари

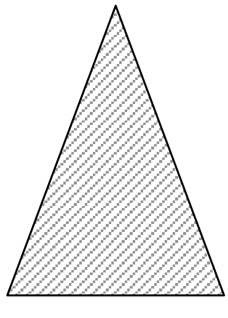
Режа:

1. Юз тушунчаси
2. Тўғри тўртбурчакнинг юзи.
3. Параллелограммнинг юзи.
4. Учбурчакнинг юзи.
5. Учбурчакнинг юзи учун Герон формуласи.
6. Трапециянинг юзи.
7. Учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари учун формулалар.
8. Ўхшаш фигураларнинг юзлари.
9. Доиранинг юзи.

1. Юз тушунчаси.

Агар геометрик фигурани чекли сонларга ясси учбурчакларга бўлиш мумкин бўлса, бу фигура содда фигура дейилади. Шуни эслатиб ўтамизки, биз ясси учбурчак деб текисликнинг учбурчак билан чегараланган чекли қисмини айтамиз.





1-расм 2-расм

Ҳар бир киши фигуранинг юзи ҳақида тушунчага эга: Биз хонанинг юзи, ер участкасининг юзи, бўяш керак бўлган сирт юзи ва бошқалар ҳақида гапирамиз.

Юз ҳақидаги одатдаги тасаввур геометрияда фигуранинг юзи ҳақида гапирилганда уни таорифлашда қўлланилади. Аммо геометрик фигуралар турлича тузилган, шунинг учун юз ҳақида гапирилганда фигуралар алоҳида синфлари фарқ қилинади. Масалан, кўпбурчак ва чегараланган қавариқ фигуралар юзи ёки доира юзи, айланиш жисмларининг сиртлари юзи қараалди. Биз фақат кўпбурчак ва чегераланган ясси қавариқ фигуралар юзлари ҳақида гапирамиз. Бундай фигура бошқа фигуралардан тузилган бўлиши мумкин.

Таориф. Фигуранинг юзи деб ҳар бир фигура учун қуйидагича аниқланган номанфий катталикка айтилади.

1) тенг фигуралар тенг юзларга эга;
2) агар фигура чекли сондаги фигуралардан тузилган бўлса, унинг юзи бу фигуралар юзларининг йиғиндисига тенг.

Агар бу таорифни кесма узунлигининг таорифи билан таққосласак, юз ҳам узунлик тавсифланган хоссалар билан тавсифлангани, бироқ улар турли тўпламларда: узунлик - кесмалар тўпламида, юз - ясси фигуралар тўпламида берилганини кўрамиз.

F фигуранинг юзини S (F) билан белгилаймиз.

Фигуранинг юзини ўлчаш учун юз бирлигига эга бўлиш керак. Одатда юз бирлиги учун томони бирлик кесма, *е* га, яони узунлик бирлиги учун танлаб олинган кесмага тенг бўлган квадрат юзи олинади. Томони *е* бўлган квадрат томонининг узунлиги *т* бўлса, унинг юзи m^2 бўлади.

Юзни ўлчаш берилган фигура юзини бирлик квадрат юзи e^2 билан таққослашдан иборат. Бу таққослашнинг натижаси $S\ (F)=xe^2$ ни қаноатлантирувчи *х* сондан иборат. *х* сон танлаб олинган бирликда юзнинг сон қиймати дейилади.

Фигураларнинг юзларини ўлчашнинг баози бир усулларини кўриб чиқиш мумкин.

Бевосита юзни аниқлайдиган усуллардан бири юзни палетка ёрдамида ўлчашдир.

Юзи ўлчанаётган F фигура устига томони *е* бўлган квадратлар тўри қўйилган бўлсин. У ҳолда бу фигурага нисбатан квадратларнинг икки турини кўрсатиш мумкин.

1) бутунлай F фигура ичида ётадиган квадратлар - *т* та;

2) бир қисми F фигура ичида, бир қисми унинг ташқарисида ётадиган ва фигура контури ўтадиган квадратлар - *п* та.

У ҳолда, F фигуранинг юзи $m\ e^2<S(F)<(m+n)e^2$ шартни қаноатлантиради: *т* - ками билан олинган сон қиймат, $m+n$ ортиғи билан олинган тақрибий қиймат.

Кўриб турибмизки, бундай палетка ёрдамида F фигуранинг юзини катта аниқликда ўлчай олмас эканмиз. Аниқроқ натижа олиш учун палетка квадратларини майдароқ қилиш керак, бунинг учун дастлабки квадратларни майдароқ квадратларга бўлиш керак.

Палетка ёрдамида фигураларнинг юзини ўлчаш усули қўлланишда чегараланган, у узундан-узоқ ишдир, шунинг учун унча катта бўлмаган фигураларнинг юзигина палетка ёрдамиида топилади. Шу сабабли математикада палетканинг пайдо бўлиши билан бирга фигурага тегишли бўлган томонлар, баландликлар ва бошқа кесмаларни ўлчаш билан юзни топишнинг бошқа воситали йўллари қондирила бошланди. Масалан, тўғри тўртбурчак юзининг сон қийматини топиш учун унинг томонлари узунликларининг сон қийматлари кўпайтирилади.

Бу юз таорифи ва уни ўлчаш моҳиятидан юзларни таққослашнинг ва улар устида амаллар бажаришнинг маолум қоидалари келиб чиқади. Улардан баозиларини келтирамиз.

1. Агар фигуралар тенг бўлса, у ҳолда улар юзларининг сон қийматлари тенг бўлади (бир хил юз бирлигида).

2. Агар F фигура F_1, F_2,… F_n фигуралардан тузилган бўлса, F фигура юзининг сон қиймати F_1, F_2,… F_n фигуралар юзлари сон қийматлари йиғиндисига тенг бўлади.

3. Юз бирлигини алмаштирганда янги бирлик эски бирликдан қанча кичик (катта) бўлса, юзнинг сон қиймати шунча марта ортади (камаяди).

I ва II синф ўқувчиларига фигуралардаги катакларни санаш, фигураларни берилган шаклига кўра катаклар бўйича ясаш, фигуралар қирқиш, устига қўйиш усули билан фигураларни таққослашга оид машқлар берилади.

«Кўпбурчакнинг юзи» мавзуси III синфда ўрганилади.

Фигуранинг юзи ҳақидаги умумий тасаввурларни шакллантиришдан олдин ўқувчиларда кесмалапрни таққослаш, кесмалар ва кесмалар узунликларига нисбатан «катта», «кичик», «тенг» муносабатлари ҳақида ўқувчиларда тўпланган маолумотларни умумлаштириш муҳимдир.

Ўқувчилар бир фигура иккинчисининг ичига жойлашмаса, фигураларни таққослаб юзини топишда қийинчиликка учрайдилар. Бунда фигураларни катакларга бўлиш ёрдамга келади. Фигурани тенг катакларга бўладилар ва тузилган квадратлар сонини топадилар.

Кейинги босқичда юз ўлчовлари ҳақида тўхталиш лозим. Юзни чизиқли ўлчовлар билан ўлчаш мумкин эмас. Юз ўлчовлари узунлик ўлчовларига мос равишда квадрат сантиметр, квадрат, дециметр ва квадрат метр киритилади.

Фигуранинг юзи тушунчасии шакллантиришда амалий машқларга алоҳида аҳамият бериш керак. Бу машқларнинг бажарилиши мавзуни ўрганишга бевосита тайёргарлик бўлади.

Томонининг узунлиги 1 *см* бўлган квадрат квадрат сантиметр деб аталиши ва квадрат сантиметрлардан фигуралар ясашни ўзлаштиргандан сўнг квадрат дециметр киритилади. Буни асослаш учун қандайдир катта нарсанинг, масалан, ўқитувчининг столини юзини, синф хаттахтаси юзини ҳисоблашни таклипф қилиш мумкин.

Квадрат дециметр мавзусини мустаҳкамлаш жараёнидан квадрат метр мавзусига ўтиш мумкин. Унда, маълумки газета саҳифасининг юзи квадрат метрнинг ярамига тенг, иккита саҳифани ёпиштириб юзини ҳисоблашни, синф полининг юзини топишни машқ сифатида киритиш мумкин.

Қаварик ясси кўпбурчак содда фигурага мисол бўлади. Бу кўпбурчак ўзининг бирор учидан чиққан диагоналлари билан ясси учбурчакларга бўлинади. Биз фақат ясси кўпбурчакларни қараймиз ва шу сабабли хар гал “ясси” сўзини қайтармаймиз.

Таъриф. Юз бу мусбат миқдор (катталик) бўлиб, унинг сон қиймати қуйидаги хоссаларга эга:

1) Тенг фигуралар тенг юзларга эга.
2) Агар фигура содда фигуралардан иборат қисмларга бўлинса, у ҳолда бу фигуранинг юзи қисмлари юзлари йиғиндисига тенг.
3) Томони бир ўлчов бирлигига тенг бўлган квадратнинг юзи бирга тенг.

Агар таърифда сўз бораётган квадратнинг томони 1м га тенг бўлса, у ҳолда юз квадрат метрларда ($м^2$) ифодаланади. Агар квадратнинг томони 100м бўлса, у ҳолда юз гектарларда ифодаланади. Агар квадратнинг томони 1км бўлса, у ҳолда юз квадрат километрларда ифодаланади ва ҳ.к.

2. Тўғри тўртбурчакнинг юзи.

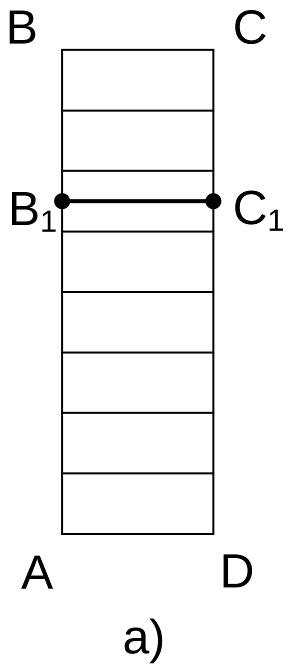
Томонлари a ва b га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини топамиз. Бунинг учун олдин асослари тенг бўлган иккита тўғри тўртбурчак юзларининг нисбати улар баландликларининг нисбати каби бўлишини исботлаймиз.

$ABCD$ ва AB_1C_1D тўғри тўртбурчаклар умумий асослари AD бўлган тўғри тўртбурчак бўлсин (3 а расм). S ва S_1 - уларнинг юзлари. $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$ эканини исботлаймиз. Тўғри тўртбурчакнинг AB томонини катта сондаги n та тенг қисмга бўламиз, бу қисмларнинг ҳар бири $\frac{AB}{n}$ га тенг. m - бўлиниш нуқталари сони, бу нуқталар AB_1 томонда ётади. Шунинг учун:

$$\frac{AB}{n}\left(m \le AB_1 \le \frac{AB}{n}\right)(m+1)$$

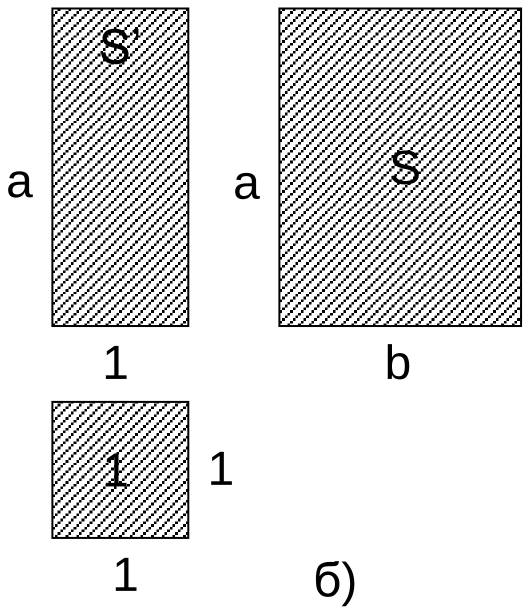
Бундан, AB га бўлиб, топамиз:

$$\frac{m}{n} \le \frac{AB_1}{AB} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (*)$$



а)

3-расм



Бўлиниш нуқталаридан AD асосга параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар ABCD тўғри тўртбурчакни n та тенг тўғри тўртбурчакларга бўлади. Бу тўртбурчаклардан ҳар бирининг юзи $\frac{S}{n}$ га тенг . AB_1C_1D тўғри тўртбурчак дастлабки m та тўғри тўртбурчакни, пастдан ҳисоблаганда, ўз ичига олади ва у $m+1$ тўғри тўртбурчак ичида ётади. Шу сабабли

$$\left(\frac{S}{n}\right)m \le S_1 \le \left(\frac{S}{n}\right)(m+1)$$

Бундан:

$$\frac{m}{n} \le \frac{S_1}{S} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (**)$$

(*) ва (**) тенгсизликлардан $\frac{AB_1}{AB}$ ва $\frac{S_1}{S}$ иккала сон $\frac{m}{n}$ ва $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ сонлар орасида ётишини кўрамиз. Бу сонлар шунинг учун бир биридан $\frac{1}{n}$ дан катта бўлмаган сон қадар фарқ қилади, n ни исталганча катта қилиб олиш мумкинлиги туфайли бу фақат бўлгандагина бўлиши мумкин, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энди юз бирлиги бўлган квадратни, томонлари 1, a га тенг бўлган ҳамда a, b га тенг бўлган тўғри тўртбурчакларни оламиз (3б-расм) . Улар юзларини таққослаб исботланганига кўра ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{S'}{1} = \frac{a}{1} \text{ ва } \frac{S}{S'} = \frac{b}{1}$$

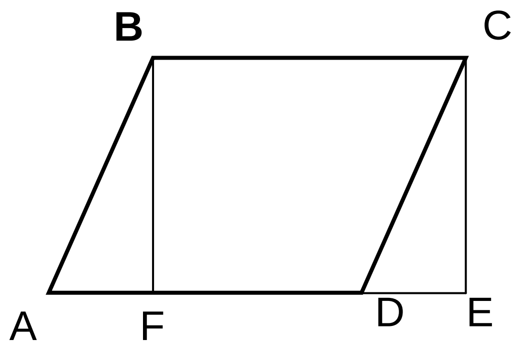
Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтириб, топамиз:

$$S = ab$$

Шундай қилиб, томонлари a, b га тенг **тўғри тўртбурчакнинг юзи** $S = ab$ формула бўйича ҳисобланади.

3. Параллелограммнинг юзи.

ABCD берилган параллелограмм бўлсин.



4-расм

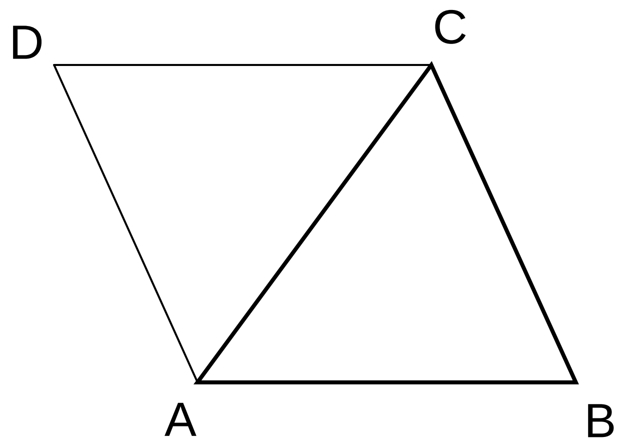
Параллелограммнинг юзи унинг томонини шу томонга туширилган баландлигига кўпайтирилганига тенг.

4. Учбурчакнинг юзи.

ABC берилган учбурчак бўлсин. Бу учбурчакни расмда кўрсатилганидек ABCD параллелограмгача тўлдирамиз. Параллелограммнинг юзи ABC ва CDA учбурчак юзларининг йиғиндисига тенг. Бу у чбурчаклар тенг бўлгани учун параллелограмнинг юзи ABC учбурчак юзининг иккиланганига тенг. Параллелограмнинг AB томонига мос баландлиги ABC учбурчакнинг AB томонига утказилган баландлигига тенг.

Бундан учбурчакнинг юзи унинг томони билан шу томонига туширилган баландлиги кўпайтмасининг яримга тенг.

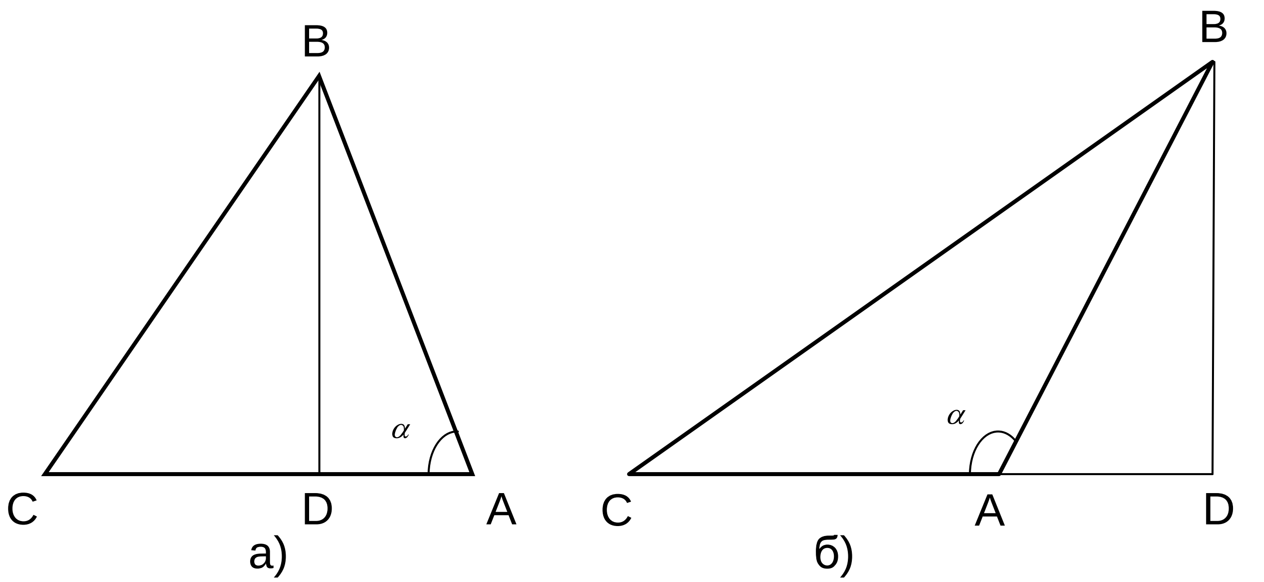
$$S = \frac{1}{2}ah$$



5-расм

Энди учбурчакнинг юзи уни исталган икки томони кўпайтмасини шу томонлар орасидаги бурчак синусига кўпайтирилганинг ярмига тенг экинини кўрсатамиз.

ABC – берилган учбурчак бўлсин



6-расм

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

ABC учбурчакнинг BD баландлигини ўтказамиз. Ушбу тенгликга эгамиз:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

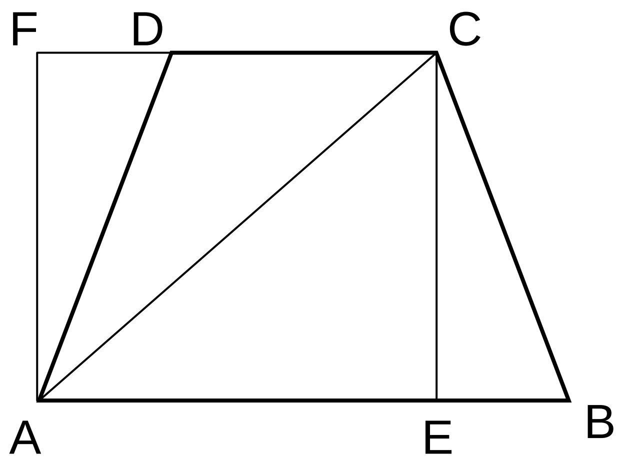
ABD тўғри бурчакли учбурчакдан, агар α ўткир бурчак бўлса, $BD = AB \sin \alpha$, агар α ўтмас бурчак бўлса, $BD = AB \sin(180^\circ - \alpha)$. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ шу сабабли ҳар қандай ҳолда $BD = AB \sin \alpha$. Шундай қилиб **учбурчакнинг юзи** $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

5. Учбурчакнинг юзи учун Герон формуласи.

Учбурчакнинг юзи учун $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **Герон формуласидир**. Бунда a, b, c - учбурчак томонларининг узунликлари, $p = \frac{a+b+c}{2}$ - ярим периметр.

6. Трапециянинг юзи.

ABCD – берилган трапеция бўлсин.



7-расм

Трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг.

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

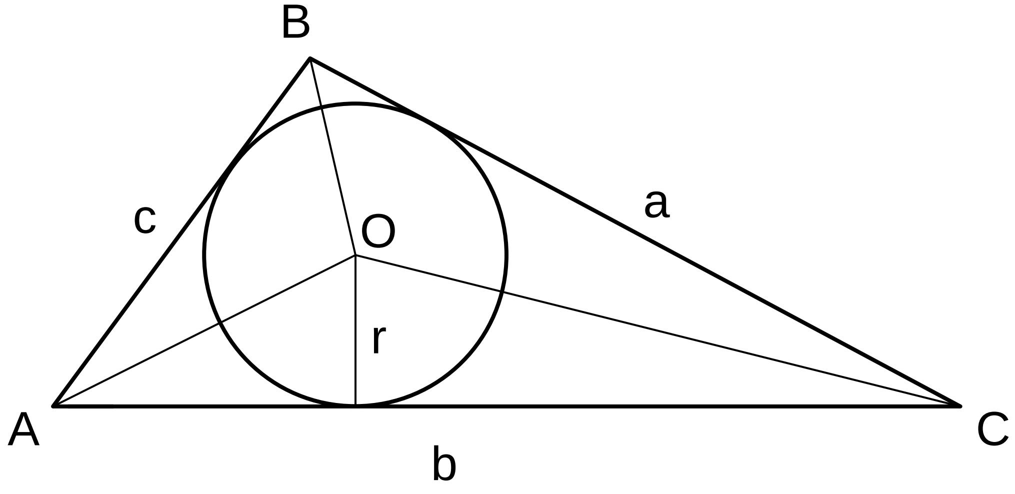
a, b - трапециянинг асослари, h - баландлик.

7. Учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари учун формулалар.

Учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари қуйидаги формулалар билан аниқланади:

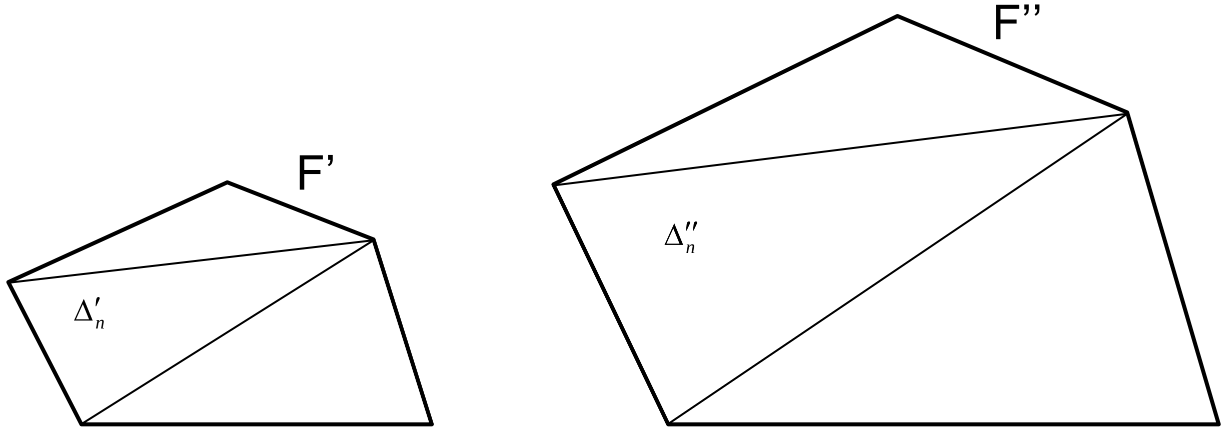
$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c}$$

R - ташқи чизилган айлананинг радиуси, r - ички чизилган айлананинг радиуси.



8-расм

8. Ўхшаш фигураларнинг юзлари.



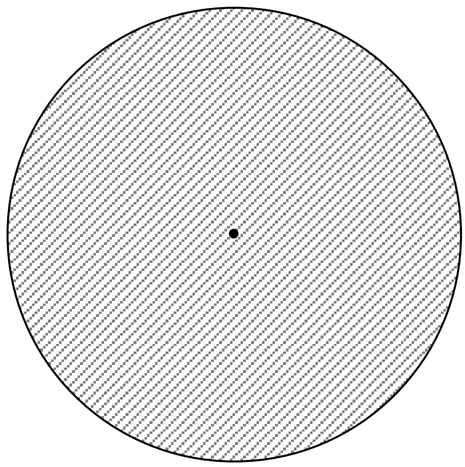
9-расм

F' ва F'' ўхшаш содда фигуралар бўлсин. Бу фигураларнинг юзлари қўйидаги нисбатда бўлади. **Ўхшаш фигуралар юзларининг нисбати** уларнинг мос чизиқли ўлчамлари квадратларининг нисбатига тенг.

$$S(F'') = k^2 S(F')$$

k - ўхшашлик коэфициенти.

9. Доиранинг юзи.



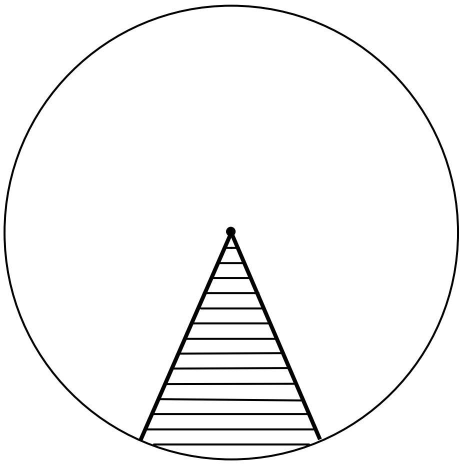
10-расм

Айлана узинлиги $l = 2\pi \cdot R$ формула билан аниқланади.

Доиранинг юзи уни чегараловчи айлана узунлиги билан радиуси кўпайтмасининг ярмига тенг.

$$S = \frac{l \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2$$

Доиравий сектор деб доиранинг мос марказий бурчаги ичидаги қисмига айтилади.



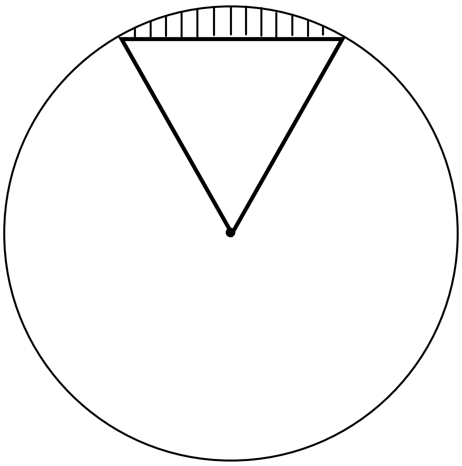
11-расм

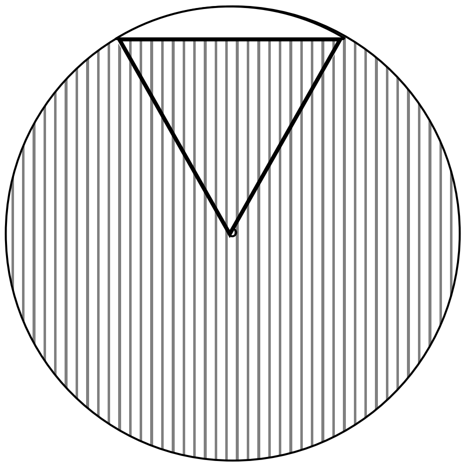
Доиравий сектор юзи

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$$

формула буйича ҳисобланади, бунда R - доира радиуси, α- мос марказий бурчакнинг градус ўлчови.

Доира билан ярим текисликнинг умумий қисми **доиравий сегмент** дейилади.





12-рсм

Ярим доирага тенг бўлмаган сегментнинг юзи

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\Delta}$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда α- шу доиравий сегмент ёйини уз ичига олган марказий бурчакнинг градус ўлчови, S_{Δ}- учлари доира маркази билан тегишли секторни чегараловчи радиуслар охирларидан иборат учбурчакнинг юзи. $\alpha < 180^{\circ}$ бўлганда “-” ишорани, $\alpha > 180^{\circ}$ бўлганда “+” ишорани олиш керак.

Мавзуни мустаҳкамлаш учун саволлар:

1. Содда фигуралар юзларининг хоссаларини ифодаланг.

2. Тўғри тўртбурчакнинг юзи унинг томонлари кўпайтмасига тенглигини исботланг.
3. Параллелограмнинг юзи унинг томонини шу томонга туширилган баландлиги билан кўпайтмасига тенглигини исботланг.
4. Учбурчакнинг юзи унинг томони билан шу томонга туширилган баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенглигини тушунтиринг.
5. Учбурчакнинг юзи унинг исталган икки томони кўпайтмасининг ярми билан шу томонлар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасига тенглигини курсатинг?
6. Трапеция юзи қандай формула билан топилади?
7. Ўхшаш фигуралар юзларининг нисбати нимага тенг?
8. Доира юзининг формуласини айтинг?

Доиравий секторнинг ва доиравий сегментнинг юзлари қандай формулалар орқали ҳисобланади.

10- Мавзу. Жисмнинг хажми ва уни ўлчаш (кўпёқлилар ва айланма жисмлар)

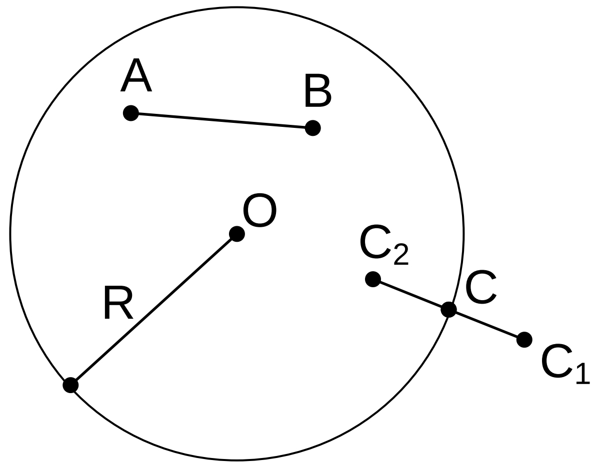
Режа

1. Геометрияда жисм ва унинг сирти ва ҳажм тушунчалари ҳақида.
2. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми
3. Оғма параллелепипеднинг ҳажми.
4. Призманинг ҳажми.
5. Тенгдош жисмлар.
6. Пирамиданинг ҳажми.
7. Кесик пирамиданинг ҳажми
8. Ўхшаш жисмларнинг ҳажмлари.
9. Цилиндрнинг ҳажми.
10. Конуснинг ҳажми.
11. Кесик конуснинг ҳажми.
12. Айланиш жисмлари ҳажмлари учун умумий формула.
13. Шар ҳажми.
14. Шар сегменти ва секторининг ҳажми.
15. Цилиндр ён сиртининг юзи.
16. Конус ён сиртининг юзи.
17. Сферанинг юзи.

1. Геометрияда жисм ва унинг сирти ва ҳажм тушунчалари ҳақида.

Геометрик жисм ва унинг сиртига аниқ таъриф берайлик.

Фигуранинг нуқтаси **ички нуқта** дейилади, агар маркази шу нуқтада булиб, бутунлай шу фигурага тегишли булган шар мавжуд бўлса. Агар фигуранинг ҳамма нуқталари ички бўлса ва унинг исталган икки нуқтасини бутунлай фигурага тегишли бўлган синиқ чизиқ билан бирлаштириш мумкин булса, бу фигура соҳа дейилади. Бу таърифни шар мисолида тушунтирамиз.



1- расм

Шар марказидан R дан кичик r масофага узоқлашган ҳар бир нуқта шарнинг ички нуқтаси ҳисобланади, чунки маркази шу нуқтада бўлиб, радиуси $R-r$ тенг бўлган шар дастлабки R радиусли шарнинг ичида жойлашган. Шар марказидан R дан кичикроқ масофага узоқлашган шарнинг хамма нуқталари соҳани ташкил этади. Ҳақиқатан ҳам, исталган шундай иккита А ва В нуқта АВ кесма билан бирлаштирилади, бу кесманинг ҳамма нуқталари марказдан R дан кичик масофада ётади.

Маркази маълум нуқтада бўлган исталган шар фигурага тегишли нуқталарни ҳам, унга тегишли бўлмаган нуқталарни ҳам ўз ичига олса, фазонинг бу маълум нуқтаси берилган фигуранинг **чегара нуқтаси** дейилади. Шар учун О нуқтадан R масофага узоқлашган нуқталар чегара нуқталар бўлади, яъни шарнинг чегараси сферадир . Маркази С нуқтада ва радиуси $r>0$ бўлган ҳар бир шарда ҳар бир шундай С нуқта учун О нуқтадан R дан каттароқ масофада ётувчи ва R дан кичикроқ масофада ётувчи C_1 ва C_2 нуқталарни кўрсатиш мумкин .

Соҳа ўзининг чегараси билан бирга **ёпиқ соҳа** дейилади.

Чекли ёпиқ соҳа **жисм** дейилади. Жисмнинг чегараси **жисмнинг сирти** дейилади. Шар жисмга мисол бўлади. Кўпёқлар цилиндр ва конус жисмларга мисол бўлади.

Фазодагига ўхшаш, кисликда ҳам фигуранинг ички нуқтаси, чегара нуқта ва соҳа тушунчалари киритилади. Соҳанинг чегара нуқталари соҳа чагарасини ташкил этади. R радиусли доирада марказдан R дан кичик масофадаги нуқталар ички нуқталар, R га тенг масофадаги нуқталар эса чегара нуқталар дейилади. Доира - ёпиқ соҳа.

Ясси кўпбурчак - чегараси кўпбурчак бўлган текисликдаги чегараланган ёпиқ соҳадир.

Кўпёқларнинг ҳажми

Текисликда фигуралар учун юз тушунчаси киритилгани каби фазода жисмлар учун ҳажм тушунчаси киритилади. Аввал содда жисмлар қаралади. Жисмни чекли сондаги учбурчакли пирамидаларга ажратиш мумкин бўлса, у содда жисм дейилади.

Тариф.

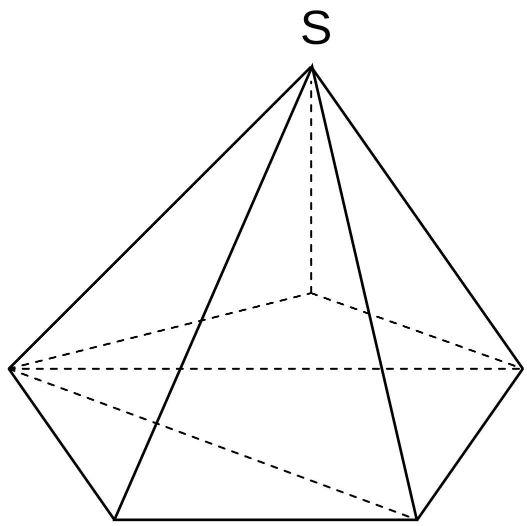
Содда жисмлар учун ҳажм –бу сон қиймати қуйидаги хоссаларга эга бўлган мусбат катталикдир:

1. Тенг жисмларнинг хажмлари тенг.

2. Агар жисм содда жисмлар ҳосил қилувчи қисмларга бўлинса, бу жисмнинг ҳажми унинг қисмлари ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади.

3. Қирраси узунлик бирлигига тенг бўлган кубнинг ҳажми бирга тенг.

Агар таърифда гап борган кубнинг қирраси 1см га тенг бўлса, у ҳолда ҳажм куб сантиметрларда бўлади; агар кубнинг қирраси 1м га тенг бўлса, у ҳолда хажм куб метрларда бўлади; агар кубнинг қирраси 1км га тенг бўлса, у ҳолда ҳажм куб километрларда бўлади ва ҳоказо.



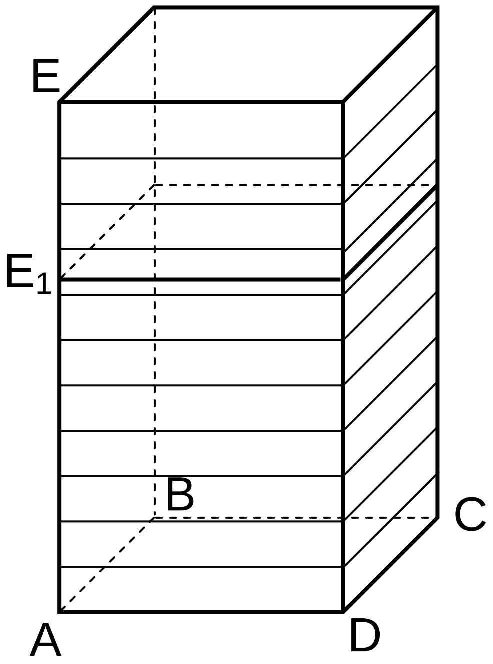
2-расм

Исталган қавариқ кўпёқ содда жисмга мисол бўлади. Уни чекли сондаги учбурчакли пирамидаларга қуйидагича ажратиш (бўлиш) мумкин. Кўпёқнинг бирор S учини белгилаймиз. Кўпёқнинг S учини ўз ичига олмаган ҳамма ёқларини учбурчакларга бўламиз. У ҳолда бу учбурчаклар асос, S нуқта эса умумий уч вазифасини ўтайдиган ҳамма учбурчакли пирамидалар кўпёқнинг учбурчакли пирамидаларга бўлинишини беради.

2. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми

Чизиқли ўлчовлари a,b,c бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажмини топамиз. Бунинг учун аввал тенг асосли иккита тўғри бурчакли параллелепипед ҳажмларининг нисбати уларнинг баландликлари нисбати каби бўлишини исботлаймиз.

P ва P_1 – умумий асосли ABCD ва баландликлари AE ва AE_1 бўлган иккита тўғри бурчакли параллелепипед бўлсин. Аниқлик учун $AE_1 < AE$ деб ҳисоблаймиз.



3-расм

V ва V_1 –параллелепипедларнинг ҳажмлари бўлсин. P палаллелепипеднинг AE қиррасини жуда кўп сондаги n та тенг қисмларга бўламиз. Уларнинг ҳар бири $\frac{AE}{n}$ тенг. m катталик AE қиррадаги бўлиниш нуқталари сони бўлсин. У ҳолда

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \le AE_1 \le \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1)$$

Бундан:

$$\frac{m}{n} \le \frac{AE_1}{AE} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (*)$$

Бўлиниш нуқталари орқали асосига параллел текисликлар ўтказамиз. Улар P параллелепипедни n та тенг параллелепипедларга ажратади. Улардан ҳар бирининг ҳажми $\frac{V}{n}$ га тенг. P_1 параллелепипед пастдан бошлаб ҳимоблаганда дастлабки m та параллелепипедни ўз ичига олади ва $m+1$ та параллелепипед ичида ётади. Шунинг учун:

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \le V_1 \le \left(\frac{V}{n}\right)(m+1)$$

Бундан:

$$\frac{m}{n} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (**)$$

(*) ва (**) тенгсизликлардан кўриб турибмизки, $\frac{V_1}{V}$ ва $\frac{AE_1}{AE}$ сонларнинг иккаласи ҳам $\frac{m}{n}$ ва $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ орасида ётади. Шунинг учун ҳам улар $\frac{1}{n}$ дан ортиқ фарқ қилмайди. n ни исталганча катта қилиб олиш мумкин бўлгани учун бу ҳол $\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$ бўлгандагина юз бериши мумкин, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энди ҳажмнинг ўлчов бирлиги ҳисобланган кубни ва ўлчовлари: a,1,1; a,b,1; a,b,c бўлган учта тўғри бурчакли параллелепипедни оламиз. Уларнинг ҳажмларини мос равишда V_1, V_2 ва V билан белгилаймиз. Исботланганига кўра

$$\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}, \quad \frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}.$$

Бу учта тенгликни ҳадма-ҳад кўпайтириб,

$$V = abc$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, чизиқли ўлчовлари a, b, c бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми $V = abc$ формула бўйича ҳисобланади.

Масала. Кубнинг ҳар бир қирраси 2см орттирилса, унинг ҳажми 98см^3 ортади. Кубнинг қирраси қанчага тенг?

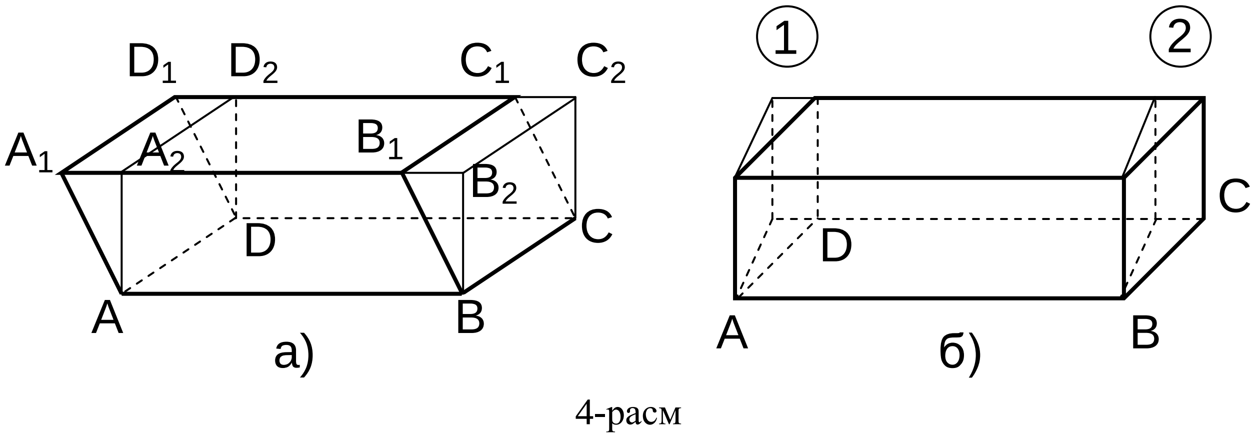
Ечилиши. Кубнинг қиррасини x билан белгилаймиз, у ҳолда $(x+2)^3 - x^3 = 98$, яъни $x^2 + 2x - 15 = 0$. Тенгламанинг иккита илдизи бор: $x=3$, $x=-5$. Фақат мусбат илдиз геометрик маънога эга. Шундай қилиб, кубнинг қирраси 3см га тенг.

3. Оғма параллелепипеднинг ҳажми.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ оғма параллелепипеднинг ҳажмини топамиз. (4-расм)

BC қирра орқали ABCD асосига перпендикуляр текислик ўтказамиз ва оғма параллелепипедни $BB_1B_2CC_1C_2$ учбурчакли призма билан тўлдирамиз (4-а расм). Энди ҳосил қилинган жисмдан AD қиррадан ўтувчи ва ABCD асосга перпендикуляр текислик ёрдамида учбурчакли призмани ажратиб ташлаймиз. Натижада яна параллелепипед ҳосил қиламиз. Бу параллелепипеднинг ҳажми дастлабки параллелепипеднинг ҳажмига тенг.

Ҳақиқитан, тўлдирилган призма ва ажратиб ташланган призма AB кесма қадар параллел кўчиришда устма-уст тушади, демак, бир хил ҳажмга эга. Параллелепипедни юқорида кўрсатилган алмаштириш натижасида унинг асоси, юзи ва баландлиги сақланади. Шунингдек, иккита ён ёғининг текисликлари сақланади, қолган иккитаси эса асосига перпендикуляр бўлади.



4-расм

Бундай алмаштиришни оғма ёқларга яна бир марта қулланиб, ҳамма ён ёқлари асосига перпендикуляр бўлган параллелепипедни, яъни тўғри параллелепипедни ҳосил қиламиз.

Ҳосил қилинган тўғри параллелепипедда шунга ўхшаш алмаштиришлар бажариб, яъни аввал 1 призма билан тўлдириб, сўнгра 2 призмани ажратиб ташлаб, тўғри бурчакли параллелепипед ҳосил қиламиз (4-б расм). Бундай алмаштириш параллелепипеднинг ҳажмини, асосининг юзини ва баландлигини сақлайди.

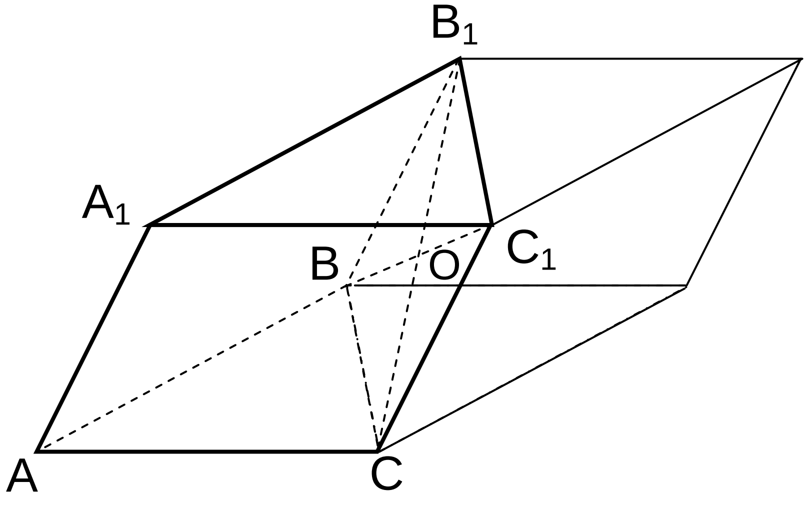
Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг чизиқли ўлчовлари кўпайтмасига тенг. Иккита чизиқли ўлчовининг кўпайтмаси параллелепипед асосининг юзи, учинчи ўлчови-унинг баландлиги.

Шундай қилиб, тўғри бурчакли параллелепипедтнг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг экан. Берилган параллелепипедни тўғри бурчакли параллелепипедга юқорида тавсифланганидек алмаштирилса ҳар гал ҳажм, асосининг юзи ва баландлиги сақлангани учун дастлабки параллелепипеднинг ҳажми ҳам асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади.

Шундай қилиб, исталган параллелепипеднинг ҳажми асос юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

4. Призманинг ҳажми.

Аввал учбурчакли призмани қараймиз (5-расм). Уни расмда кўрсатилгандек параллелепипедга тўлдирамиз. O нуқта параллелепипеднинг симметрия маркази бўлади. Шунинг учун ясалган призма берилган призмага O нуқтага нисбатан симметрик, демак, ҳажми берилган призманинг ҳажмига тенг. Шундай қилиб, исталган параллелепипеднинг ҳажми берилган призма ҳажмининг иккиланганига тенг.



5-расм

Параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Асосининг юзи эса ABC учбурчак юзининг иккиланганига тенг, баландлиги эса берилган призма баландлигига тенг. Демак, берилган призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

Энди иҳтиёрий призмани қараймиз (6-расм). Унинг асосини учбурчакларга ажратамиз. Δ – шу учбурчаклардан бири бўлсин. Δ учбурчакнинг ихтиёрий X нуқтасидан ён қиррасига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. a_x - шу тўғри чизиқнинг призмагатегишли кесмаси бўлсин. X нуқта Δ учбурчакни айланиб чиққанда a_x кесмалар учбурчакли призмани тўлғазади. Ҳар бир Δ учбурчак учун шундай призма ясаб, берилган призмани учбурчакли призмаларга ажратамиз. Бу призмаларнинг ҳаммасининг баландлиги берилган призма баландлигига тенг.

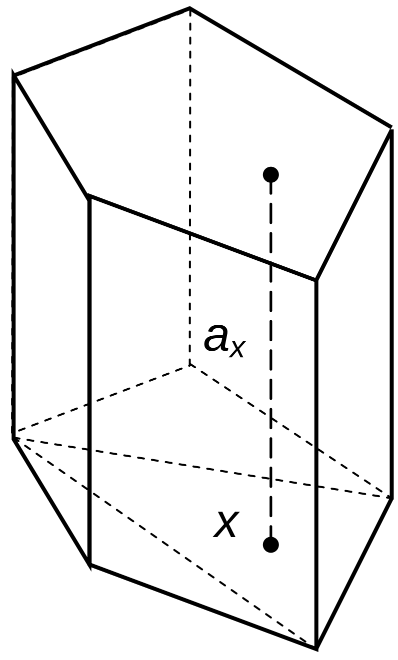
Берилган призманинг ҳажми уни ташкил этувчи учбурчакли призмалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Исботланганига кўра учбурчакли призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Бундан берилган призманинг ҳажми топилади:

$$V = S_1H + S_2H + ... + S_nH = (S_1 + S_2 + ... + S_n)H$$

Бу ерда $S_1, S_2, ..., S_n$ - призма асосида бўлиниш натижасида ҳосил қилинган учбурчакларнинг юзлари, H эса призманинг баландлиги. Учбурчаклар юзларининг йиғиндиси берилган призма асосининг S юзига тенг. Шунинг учун

$$V = S \cdot H$$

Шундай қилиб, исталган призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.



6-расм

5. Тенгдош жисмлар.

Таъриф.

Икки жисмнинг ҳажмлари тенг бўлса, бундай жисмлар **тенгдош** дейилади

Асосларининг юзларитенг ва баландликлари тенг иккита учбурчакли пирамида тенгдошдир.

6. Пирамиданинг ҳажми.

SABC –учи S ва асоси ABC бўлган учбурчакли пирамида бўлсин. Бу пирамидани шундай асосли ва шундай баландликдаги учбурчакли призмага тўлдирамиз (7-расм). Бу призма учта пирамидадан тузилган: берилган SABC пирамида ва яна иккита SCC_1B_1 ва $SCBB_1$ учбурчакли пирамида.

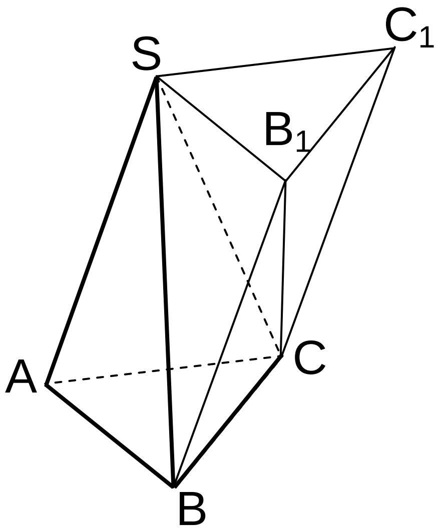
Иккинчи ва учинчи пирамидаларнинг асослари тенг - ΔCC_1B_1 ва ΔB_1BC ва S учдан туширилган умумий баландлик. Шунинг учун уларнинг ҳажмлари тенг.

Биринчи ва учинчи пирамидаларнинг ҳам асослари тенг - ΔSAB ва ΔBB_1S ҳамда C учдан туширилган баландликлари бир хил. Шунинг учун уларнинг ҳам ҳажмлари тенг.

Шундай қилиб, учала пирамиданинг ҳаммаси бир хил ҳажмга эга. Бу ҳажмларнинг йиғиндиси призманинг ҳажмига тенг бўлгани учун пирамиданинг ҳажми $\frac{SH}{3}$ га тенг.

Шундай қилиб, исталган учбурчакли пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H$$



7-расм

Таъриф. Исталган пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.

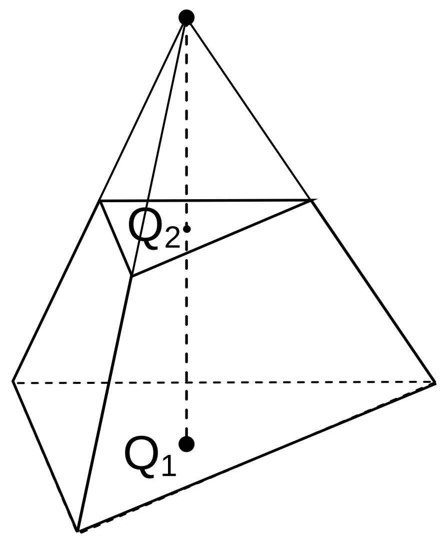
7. Кесик пирамиданинг ҳажми.

Таъриф. Кесик пирамиданинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] = \frac{1}{3} h \frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3} h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2\right)$$

формула билан аниқланади.

Бу ерда Q_1 ва Q_2 - асосларининг юзлари, h - баландлик.



8-расм

8. Ўхшаш жисмларнинг ҳажмлари.

T ва T' – иккита содда ўхшаш жисм бўлсин. Бу T жисм T' жисмга ўтадиган ўхшашлик алмаштириши мавжудлигини англатади. Ўхшашлик коэффициентини k билан белгилаймиз.

k сони ўхшашлик коэффициенти бўла туриб, ўхшашлик алмаштиришида нуқталарнинг исталган мос жуфтлари ораларидаги масофалар нисбатига тенг. Демак, бу сон T ва T' жисмларнинг исталган иккита мос чизиқли ўлчовлари нисбатига тенг. Шундай қилиб, биз қуйидаги хулосага келамиз:

Таъриф. Ўхшаш бўлган иккита жисм ҳажмларининг нисбати уларнинг мос чизиқли ўлчовлари кубларининг нисбатига тенг.

9. Цилиндирнинг ҳажми.

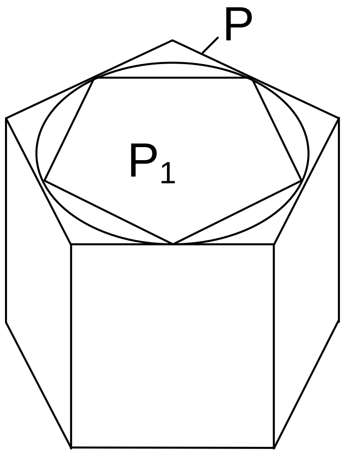
Агар жисм содда бўлса, яни чекли сондаги учбурчакли пирамидаларга бўлинса, унинг ҳажми шу пирамидалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади. Исталган жисм учун ҳажм қуйидаги тарзда таърифланади.

Таъриф.

Агар берилган жисмни ўз ичига олувчи ва берилган жисмнинг ичига жойлашган, ҳажмим V дан жуда кам фарқ қилувчи содда жисмлар мавжуд бўлса, берилган жисм V ҳажмга эга бўлади.

Бу таърифни асосининг радиуси R ва баландлиги H га тенг цилиндирнинг ҳажмини топишга қўллаймиз.

Доира юзининг формуласини чиқаришда шундай иккита n кўпбурчак ясалган эдики (бири – доирани ўз ичига олган, иккинчиси доира ичига жойлашган) уларнинг юзлари n чексиз ортганда доира юзига чексиз яқинлашади. Цилиндрнинг асосидаги доиралар учун шундай кўпбурчаклар ясаймиз, P-доирани ўз ичига олган кўпбурчак, P_1-доира ичигажойлашган кўпбурчак бўлсин (9-расм).



9-расм

Асослари P ва P_1, баландлиги цилиндрнинг H баландлигига тенг иккита тўғри призма ясаймиз. Биринчи призма цилиндрни ўз ичига олади, иккинчи призма эса цилиндр ичида жойлашади . n чексиз ортганда призма асосларининг юзлари цилиндр асосларининг S юзларига яқинлашади. Таърифга кўра цилиндрнинг ҳажми:

$$V = SH = \pi R^2 H$$

Шундай қилиб, цилиндрнинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

10. Конуснинг ҳажми.

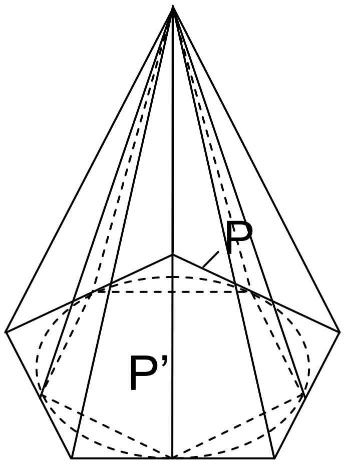
Конуснинг асоси текислигида иккита кўпбурчак ясаймиз: конуснинг асосини ўз ичига олган P кўпбурчак ва конус асосида жойлашган P' кўпбурчак (10-расм). Асослари P ва P' ҳамда учи конуснинг учида бўлган иккита пирамида ясаймиз. Биринчи пирамида конусни ўз ичига олади, иккинчи пирамида эса конус ичида ётади.

Шундай P ва P' кўпбурчаклдар борки, уларнинг томонлари сони n ни чексиз орттирганда кўпбурчакларнинг юзлари конус асосидаги доиранинг юзига чексиз яқинлашишини биламиз. Бундай кўпбурчаклар учунясалган пирамидаларнинг ҳажми $\frac{1}{3}SH$ га чексиз яқинлашади, бунда S – конус асосининг юзи, H эса унинг баландлиги. Таърифга асосан конуснинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, конуснинг ҳажми асос юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.

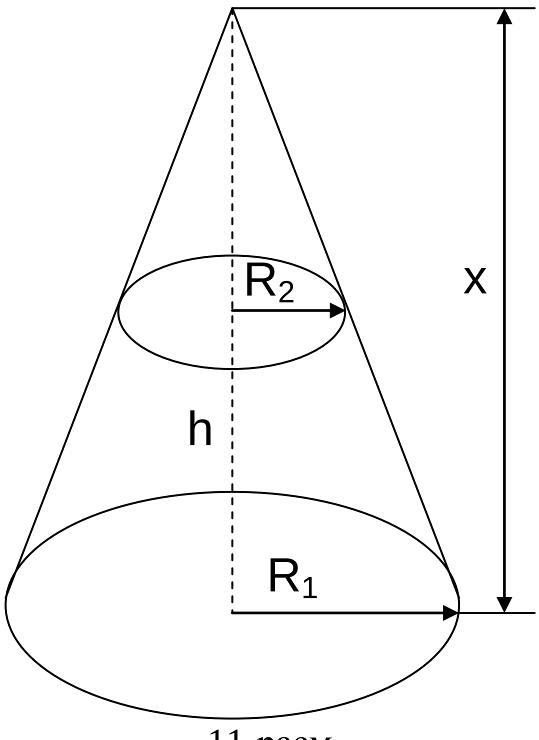


10-расм

11. Кесик конуснинг ҳажми

Асосларининг радиуслари R_1 ва R_2 $(R_2<R_1)$, баландлиги h га тенг бўлган кесик конуснинг ҳажми қуйидаги формула билан топилади

$$V=\frac{1}{3}\left[\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right]=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right).$$



11-расм

12. Айланиш жисмлари ҳажмлари учун умумий формула.

Энг оддий ҳолда **айланиш жисми** деб шундай жисмга айтиладики, бу жисм бирор тўғри яизиққа (айланиш ўқига) перпендикуляр бўлган текисликлар билан маркази шу тўғри чизиқда ётган доиралар бўйича кесишади. Доиравий цилиндр, конус, шар айланиш жисмларига мисол бўлади. Айланиш жисми ҳажмини ҳисоблаш учун формула топамиз.

Жисмнинг ўқи орқали текислик ўтказамиз ва бу текисликда жисм ўқини x ўқи деб қабул қилиб, x, y декарт координаталарини киритамиз (12-расм). xy текислик жисм сиртини шундай чизиқ бўйлаб кесиб ўтадики, унинг учун x

ўқи симметрия ўқи бўлади. $y = f(x)$ - чизиқнинг x ўқдан юқорида жойлашган қисмининг тенгламаси бўлсин.

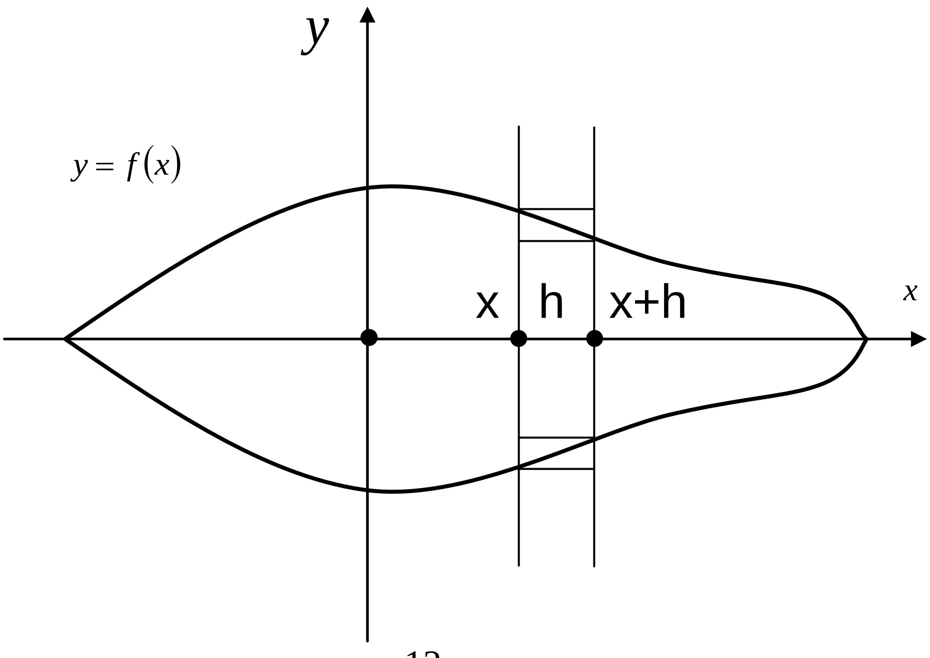
$(x, 0)$ нуқта орқали x ўқига перпендикуляр текислик ўтказамиз ва бу текисликдан чапда ётган жисм қисмининг ҳажмини $V(x)$ билан белгилаймиз; *V(x)* катталик *x* нинг функцияси бўлади. $V(x+h)-V(x)$ айирма *h* қалинликдаги жисм қатламининг ҳажмини ифодалайди, бу қатлам *x* ўқига перпендикуляр ва абсциссалари *x* ҳамда *x+h* бўлган нуқталар орқали ўтувчи иккита текислик орасига олинган. $f(x)$ функциянинг $[x,\ x+h]$ оралиқдаги энг катта қиймати *M,* энг кичик қиймати *m* бўлсин. У ҳолда жисмнинг қаралаётган қатлами радиуси *m*, баландлиги *h* бўлган цилиндрни ўз ичига олади ва радиуси *M* , баландлиги ўша *h* бўлган цилиндр ичида ётади (491-расм). Шунинг учун:

$$\pi m^2 h \le V(x+h) - V(x) \le \pi M^2 h$$

$$\pi m^2 \le \frac{V(x+h)-V(x)}{h} \le \pi M^2$$

h ,баландлик нолга интилгпнда охирги тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмлари айни бир $\pi f^2(x)$ катталикка интилади. Бу тенгсизликнинг ўрта қисми эса *h* катталик нолга интилганда $V(x)$ функциянинг $V'(x)$ ҳосиласига интилади. Демак

$$V'(x) = \pi f^2(x)\,.$$



12-расм

Анализ курсидаги маълум формула бўйича:

$$V(b) - V(a) = \int V'(x)dx = \int \pi f^2(x)dx, \qquad a < b\,.$$

Бу формула жисмнинг $x = a$ ва $x = b$ параллел текисликлар орасига олинган қисмининг ҳажмини беради.

13. Шар ҳажми

Айланиш жисмлари ҳажмлари учун ҳосил қилинган формулани шар ҳажмини ҳисоблаш учун қўллаймиз.

Шар марказини координаталар боши учун қабул қилиб, декарт координаталарини киритамиз (13-расм), xy текислик R радиусли шарни $x^2 + y^2 = R^2$ тенглама билан бериладиган айлана бўйича кесади.

x ўқидан юқорида жойлашган ярим айлана

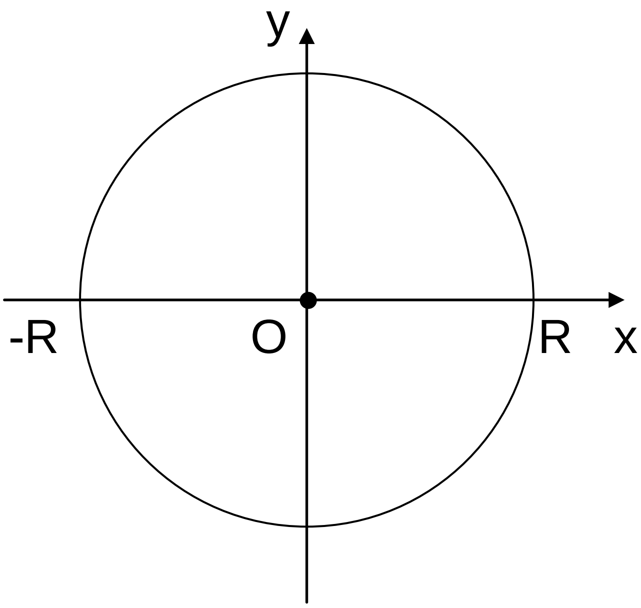
$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R \le x \le R,$$

тенглама билан ифодаланади. Шунинг учун шар ҳажми

$$V = \pi\int\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

формула бўйича аниқланади.

Шундай қилиб, шар ҳажми $\frac{4}{3}\pi R^3$ га тенг.



13-расм

14. Шар сегменти ва секторининг ҳажми

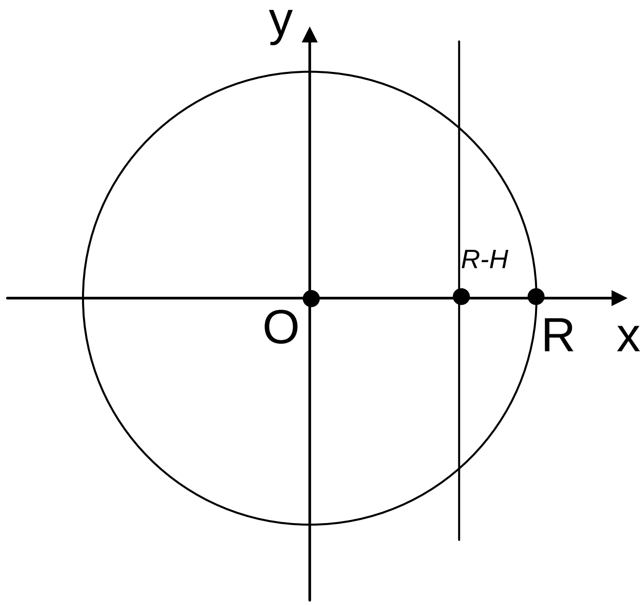
Таъриф.

Шардан текислик билан кесиб олинадиган қисми **шар сегменти** дейилади.

Шар сегменти учун формулани шар ҳажми формуласига ўхшаш ҳосил қиламиз (14-расм):

$$V = \pi\int_{R-H}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

бунда R- шарнинг радиуси, H эса шар сегментининг баландлиги.



14-расм

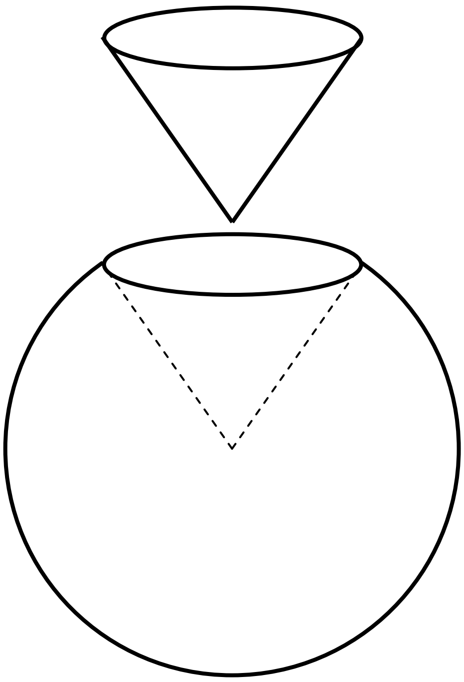
Таъриф.

Шар сегменти ва конусдан қуйидаги тарзда ҳосил бўладиган жисм **шар сектори** дейилади.

Агар шар сегменти ярим шардан кичик бўлса, у ҳолда шар сегменти конус билан тўлдирилади, бу конуснинг учи шар марказида , асоси эса сегментнинг асоси бўлади. Агар сегмент ярим шардан катта бўлса, у ҳолда айтилган конус ундан олиб ташланади (15-расм). Шар секторининг ҳажми мос сегмент ва конуснинг ҳажмларини қўшиш ёки айириш билан ҳосил бўлади. Шар сектори ҳажми учун

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

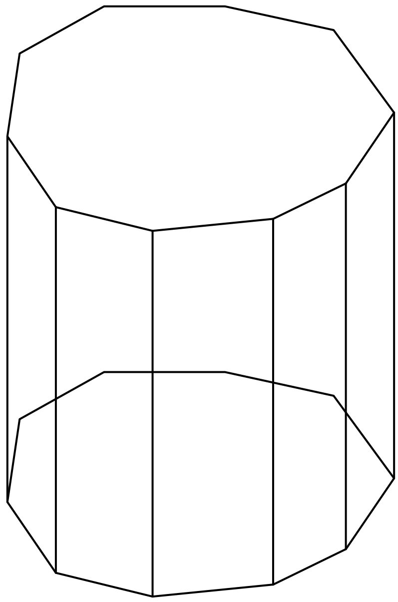
формиула ҳосил бўлади, бунда R-шарнинг радиуси, H-мос шар сегментининг ҳажми.



15-расм

15. Цилиндр ён сиртининг юзи.

Цилиндрга мунтазам n бурчакли призмани ички чизамиз (16-расм). Бу призма ён сиртининг юзи $S_n = P_n H$ бунда P_n - призма асосининг периметри, H – унинг баландлиги.



16-расм

Биз биламизки, n чексиз ортганда P_n периметр цилиндр асоси айланасининг C узунлигига чексиз яқинлашади. Демак, призма ён сиртининг юзи CH га чексиз яқинлашади. Шунинг у чун CH катталик цилиндр ён сиртининг юзи учун қабул қилинади.

Шундай қилиб, **цилиндр ён сиртининг юзи**

$$S = CH = 2\pi Rh$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда R- цилиндрнинг радиуси, H- унинг баландлиги.

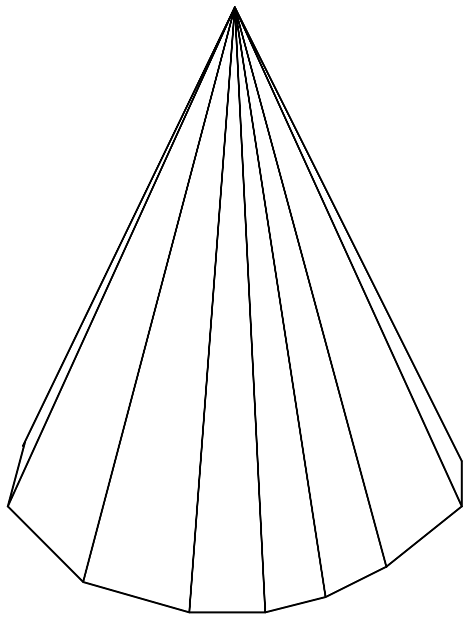
16. Конус ён сиртининг юзи.

Конусга мунтазам n бурчакли пирамидани ички чизамиз (17-расм). Унинг ён сиртининг юзи

$$S_n = \frac{1}{2} P_n l_n ,$$

бунда P_n - пирамида асосининг периметри, l_n - апофема.

n чексиз ортганда асосининг P_n периметри конус асоси айланасининг узунлигига чексиз яқинлашади, l_n апофема эса ясовчисининг l узунлигига яқинлашади. Пирамиданинг ён сирти мос ҳолда $C\frac{l}{2}$ га чексиз яқинлашади. Шу муносабат билан катталик конус ён сирти юзи учун қабул қилинади.



17-расм

Шундай қилиб, **конус ён сиртининг юзи**

$$S = \frac{1}{2}Cl = \pi Rl$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда R – конус асосининг радиуси, l - ясовчисининг узунлиги. Шунга ўхшаш асосларининг радиуслари R_1, R_2 ва ясовчиси l бўлган кесик конуснинг ён сирти юзи учун

$$S = \pi(R_1 + R_2)l$$

формула ҳосил бўлади.

17. Сферанинг юзи.

Таъриф.

R радиусли сферанинг юзи

$$S = 4\pi R^2$$

формула бўйича ҳисобланади.

Шунга ўхшаш шар сектори сиртининг сферик қисми юзи, яъни сферик сегментнинг юзи аниқланади, унинг учун

$$S = 2\pi RH$$

формула бўлади, бунда H – сегментнинг баландлиги.

Мавзуни мустахкамлаш учун саволлар.

1.Ҳажмнинг асосий хоссаларини ифодаланг.

2.Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг чизиқли ўлчовлари кўпайтмасига тенг эканини исботланг.

3. Ҳар қандай параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.Шуни исботланг.

4. Учбурчакли призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасиги тенг эканини исботланг.

5.Истаган призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг эканини исботланг.

6. Қандай фигуралар тенгдош фигура дейилади?

7. Учбурчакли пирамиданинг ҳажми учун формула келтириб чиқаринг.

8. Истаган пирамиданинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг бўлишини исботланг.

9.Ўхшаш жисмлар ҳажмларининг нисбати тегишли чизиқли ўлчовлари кубларининг нисбати каби бўлишини исботланг.

10.Цилиндр ҳажми формуласини келтириб чиқаринг.

11.Конус ҳажми учун формула чиқаринг.

12.Айланиш жисмлари ҳажми учун формула чиқаринг.

13. Шар ҳажми учун формула чиқаринг.

14.Шар сегменти нима? Шар сегменти ҳажми учун формула чиқаринг.

15.Шар сектори нима? Шар секторининг ҳажми қандай формула бўйича ҳисобланади?

16.Цилиндр ён сиртининг юзи қандай формула бўйича ҳисобланади?

17.Конус ён сиртининг юзи (кесик конус ён сиртининг юзи) қандай формула бўйича топилади?

18.Сферанинг юзи қандай формула бўйича топилади?

11- Мавзу. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

Режа:

1. Эҳтимоллар ривожи ҳақида қисқача тарихий маълумот.
2. Ходиса эҳтимолининг таърифи.
3. Эҳтимолликнинг классик, статистик ва геометрик таърифлари.

Таянч атамалар: ҳодиса, тасодифий ҳодиса, эҳтимоллик, эҳтимолликнинг классик, статистик, геометрик таърифи, гипотеза, эксперимент.

Эҳтимоллар назарияси дастлабки элементлари XVII асрнинг бошларида вужудга келган. Эҳтимоллар назарияси асосий тушунчаларини киритган олимлар Я.Бернулли, Муавр, Лаплас ва уни фан сифатида танитган олимлар рус олимлари бўлиб, Буняковский, Чебишев, Ляпунов, ака-ука Марковлар ва ҳаказолар.

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаси тажриба ва шу тажриба натижасида кузатиш мумкин бўлган ҳодиса тушунчасидир.

Масалан: нишон томон ўқ отилганда уни нишонга тегиши;

Ҳодисани рўй бериши учун керак бўладиган барча шартларни S-орқали белгилаб, буни одатда S-шартлар мажмуасини ёки шартлар комплекси дейилади.

Ҳодисаларни одатда A, B, C... белгиланади. Шартлар комплекси яратилганда, яъни тажриба ўтказилганда ҳар сафар рўй берадиган ҳодисага муқаррар ҳодиса дейилади.

Масалан нормал атмосфера босимида сувни 100^0 С иситилса, қайнаши муқаррар ҳодисадир.

Шартлар номи яратилганда, яъни тажриба ўтказилганда мутлақо рўй бермайдиган ҳодисани рўй бериши мумкин бўлмаган **ҳодиса** дейилади. Масалан: ток бўлмаган тармоқда калитни очганда лампочкани ёниши.

Шартлар комплекси яратилганда, яъни тажриба ўтказилганда рўй бериши мумкин ва мумкин бўлмаган ҳодисалар тасодифий ҳодисалар дейилади. Масалан: кубикни таваккал ташлаганда уни 5 очкони тушиш ҳодисаси. Одатда муқаррар ҳодисани - $\cup$, Ω рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодисани - ν, $\varnothing$ деб белгиланади.

Ҳар сафар А-ҳодиса рўй бериши билан, В-ҳодиса рўй берса, одатда А-ҳодиса В-ҳодисани эргаштирилади дейилади. $A\subset B$ деб белгиланади.

$A\subset B$ – ҳодиса А рўй бериши билан В-ҳодиса ҳам рўй беради. Аксинчаси ҳар сафар ўринли эмас.

Масалан: А-ҳодиса кубикни таваккал ташлаганда 2 очкони тушиш ҳодисаси.

Тасодифий ҳодисалар устида амаллар

В-ҳодиса кубикни таваккал ташлаганда жуфт очколарни тушиш ҳодисаси. Агар ҳар сафар $(A\subset B)$^$(B\subset A)A=B=$, А-ҳодисаси В-ҳодисасини эргаштирса ва В-ҳодисаси А-ҳодисани эргаштирса бу ҳодисалар айнан тенг ҳодисалар дейилади.

1) А-ҳодиса ва В-ҳодисалардан камида биттаси рўй берадиган ҳодисага А ҳамда В ҳодисаларни йиғиндиси дейилади. $A\cup B$ деб белгиланади.

2) А ҳамда В ҳодисалар бир вақтда рўй берганда рўй берадиган ҳодисага А ҳам В-ҳодисаларни “х” си дейилади.

$A\cdot B$ ёки $A\cap B$ деб белгиланади.

3) А-ҳодиса рўй бериб, В-ҳодисани рўй бермаслигидан иборат бўлганда ҳодисага А дан В ҳодисани айирмаси дейилади.

$A\backslash B$ деб белгиланади.

4) А ҳодиса рўй берганда рўй бермайдиган, $\bar{A}$ рўй бермаганда рўй берадиган ҳодисага қарама-қарши ҳодиса дейилади. $\bar{A}$-деб белгиланади. $\bar{A}$-тўлдирмаси.

Одатда ўзаро қарама-қарши ҳодисалар учун қуйидаги шартлар бажарилади: 1. $A\cup\bar{A}$-муқаррар ҳодиса бўлади. $A\cup\bar{A}=U$ 2) $A\cap\bar{A}=\nabla$.

2 та А ҳам В ҳодисаларни бир вақтда рўй бериши сира ҳам мумкин бўлмаса, яъни $A\cdot B=V$ бўлса, у ҳолда бу ҳодисаларни биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалар дейилади.

$A_1, A_2, \ldots A_n$ ҳодисалар системаси ҳодисаларни тўлиқ группасини ташкил қилади дейилади, агарда бу ҳодисаларни ақали биттасини рўй бериши муқаррар бўлса, яъни $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$. $A_1, A_2, \ldots A_n$ ҳодисалар системаси жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисаларни тўлиқ группасини ташкил қилади дейилади, агарда улардан $\forall$ 2 тасини бир вақтда бажарилиши мумкин бўлса, яъни:

1) $A_i \cap A_j = V$ (i≠j, i,j=1,n)

2) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = U$

Ҳодисалар устида юқорида аниқланган амаллар бир қанча хоссаларга эга.

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. $A \cap B = B \cap A$

4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ бу муносабатларни ўринли эканлигини худди тўпламлардаги каби бевосита исботлаш мумкин ёки илюстрация орқали исботлаш мумкин.

$\overline{1,6}$ рақамлар билан ёзилган кубик таваккал ташланганда, унда жуфт очколарнинг тушиш ҳодисаси

A={жуфт очколар}={2,4,6}

B={3 дан катта бўлмаган очколарни тушиш ҳодисаси}={1,2,3} бўлса, у ҳолда A∪B, A∩B, A\B, $\overline{A}$ ҳодисалар изоҳлансин.

1. A∪B – 5 очкодан бошқа ҳар қандай очкони тушиш ҳодисаси;
2. A∩B – фақат 2 очкони тушиш ҳодисаси;
3. A\B – 4 ва 6 очколарни тушиш ҳодисаси;
4. $\overline{A}$ - кубик таваккал ташланганда 1,3,5 тоқ очколарни тушиш ҳодисаси.

Ҳодиса эҳтимолининг таърифлари

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаси бўлган тасодифий ҳодисанинг эҳтмоли тушунчасини келтирамиз.

Ҳодисанинг эҳтимоли маъносини англаш учун битта содда мисол келтирамиз.

Битта яшикда 10 дона бир хил шар бўлиб, уларнинг иккитаси қизил рангли, 8 таси эса кўк рангли бўлсин. Яшикдаги бу шарларни яхшилаб аралаштириб, сўнг бу яшикдан қарамасдан таваккалига шарт олиш тажрибасини ўтказайлик. Равшанки, яшикдан олинган шарнинг кўк рангли бўлиш имконияти қизил рангли бўлиши имкониятига қараганда кўпроқ бўлади.

Одатда имкониятларни сонлар билан характерлаб, улар солиштирилади. Натижада кўп имкониятли, кам имкониятли умуман, маълум миқдордаги имкониятли каби ҳодисаларнинг сонли ўлчовлари тўғрисида гапириш мумкин бўлади.

Бу ҳодисанинг эҳтимоли тушунчасига олиб келади.

1.Ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи. Бирор тажриба натижасида чекли сондаги e_1, e_2, …, e_n элементар ҳодисалардан бирортаси рўй бериши мумкин бўлсин.

Бу e_1, e_2, …, e_n элементар ҳодисасалар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) ҳодисалар жуфти-жуфти билан биргаликда эмас, яъни исталган иккита e_i ва e_j(i≠j) ҳодиса биргаликда рўй бермайди;

2) e_1, e_2, …, e_n элементар ҳодисалардан бирортаси албатта рўй беради;

3) e_1, e_2, …, e_n элементар тенг имкониятли.

Бирор А ҳодиса e_1, e_2, …, e_n элементар ҳодисалар ичидан $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}$ лар рўй берсин. Бу ҳолда $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}$ элементар ҳодисалар (яъни А ҳодисасининг рўй беришига олиб келадиган ҳодисалар) А ҳодисага қулайлик туғдирадиган ҳодисалар дейилади.

Масалан, тангани икки марта ташлаш тажрибасини қарайлик. Бу тажриба натижасида ГГ, ГР, РГ, РР элементар ҳодисалар рўй беради.

А ҳодиса тангани икки марта ташлаганда иккала ҳолда ҳам гербли томони тушиши ҳодисаси (ГГ ҳодисаси) бўлсин. Бу ҳолда А ҳодисага қулайлик туғдирадиган элементар ҳодиса фақат битта бўлади. (ГГ ҳодиса).

Фараз қилайлик, n та e_1, e_2, …, e_n элементар ҳодисалардан m таси А ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирсин.

Таъриф. Ушбу $\frac{m}{n}$ сон А ҳодисанинг эҳтимоли деб аталади ва уни Р(А) каби ёзилади:

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Бу ерда m-А ҳодисани рўй бериши учун қулайлик туғдирувчи ҳолатлар сони.

n – мумкин бўлган ҳамма ҳолатлар сони. Таърифдан кўриниб турибдики, бу таъриф чекли ҳолатлар учун, тенг имколниятликка, фақат симметрик ҳолатларга ўтади.

Агар мумкин бўлган ҳолатлар сони чексиз бўлса, ҳар бир элементар ҳодисани рўй бериш имконияти тенг бўлмаса, бу таъриф ярамайди.

Масалан: 1. кубикни таваккал ташлаганда тоқ очко тушиш ҳодисаси эҳтимолли топилсин.

Ечиш: А-кубикни таваккал ташлаганда тоқ очко тушиш ҳодисаси.

Р(А)=?

e_i – орқали кубикни таваккал ташланганда унинг i очкони тушиш ҳодисаси $i=\overline{1,6}$. $\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ $A=\{e_1, e_3, e_5\}$.

Юқоридаги (1) га қўйсак n=6 m=3 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Масалан: 2. 36 талик картадан таваккалига олинган 4 та картадан 1 тасини туз карта бўлиши эҳтимоли топилсин.

Ечиш: А-36 талик картадан таваккал олинган 4 та картадан биттасини туз карта бўлиш ҳодисаси.

$n=c^n$; $m=c_4^1 \cdot c_{3\ 2}^3$ $\qquad P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_n^1 \cdot C_{3\ 2}^3}{C_{3\ 6}^4}$;

Охирги масаладан кўриниб турибдики, эҳтимоллар назарияси классик таърифидан энг оддий масалани ечиш учун комбинаторик элементларини ва мантиқий фикрлашни талаб қилади. Мана шу муносабат билан комбинаторика оид айрим тушунчаларини эслаймиз.

Бизга маълумки комбинаторика элементлари 3 та:

1. Ўрин алмаштиришлар.
2. Ўринлаштиришлар.
3. Группалашлар.

M={a_1, a_2…a_n} чекли тўплам берилган бўлсин. Бу чекли тўпламни маълум элементларидан турли бирикмалар тузиш мумкин бўлиб, уларни қандай ва қанчадан тузилишига қараб номланарди.

M={a_1, a_2,…,a_n} тўплам элементларидан тузиш мумкин бўлган ўрин алмаштиришлар деб, шундай бирикмаларга айтиладики, бу бирикмаларни ҳар бирида n-тадан элемент бўлиб, улар бири-иккинчисидан фақатгина элементларни жойлашиши билан фарқ қилади. Одатда n та элементларидан тузиш мумкин бўлган ҳамма ўрин алмаштиришлар сонини $P_n=n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ га тенг эди. n-та элементдан m-тадан (m≤n) тузиш мумкин бўлган ўринлаштиришлар деб шундай бирикмаларга айтиладики, бундай бирикмаларни ҳар бирида m-тадан элемент бўлиб, бу бирикмалар бири иккинчисидан е элементларни жойлашиш тартиби билан ёки таркиби билан фарқ қилади.

Одатда n-та элементдан m тадан тузиш мумкин ўринлашлар сони A_n^m орқали белгиланади.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)).$$

$$A_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$

n та элементдан m тадан группалашлар деб шундай бирикмаларга айтиладики, бундан бирикмаларни ҳар бирида m тадан элемент бўлиб, бундай элементлар (бўлиб) бири иккинчисидан жойлашиш таркиби билан фарқ қилади.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \qquad\qquad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

a_1 a_2 … a_n (1) b_1 b_2 … b_m тўпламнинг ҳар бир элементларидан 1 тадан элемент олиб (a_i, b_i) (i=$\overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$) жуфтликлар сони n·m дона бўлади. Индукция орқали буни ∀ чекли сондаги тўплам элементларидан тузиш мумкин бўлган ҳамма r дона элементли r ликлар сони $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_r$ дона бўлишлигини кўриш мумкин.

$P(A)=\dfrac{m}{n}$ (1) классик таъриф эҳтимоллиги қуйидаги хоссаларга эга.

1) Муқаррар ходиса эҳтимоллиги P(U)=1 га тенг.

Ҳақиқатан ҳам, муқарра ходисани таърифига асосан А-ҳодисани рўй бериши учун қулайлик туғдирувчи эҳтимоллиги.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

2) Рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодиса эҳтимоллиги P(V)=0 га тенг.

Ҳақиқатан ҳам, рўй бериш мумкин бўлмаган ҳодисани таърифига асосан тажрибани бирортаси рўй бермаслиги табиий m=0

$$P(V)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

3) $\forall$ тасодифий ҳодисани эҳтимоллиги $0<P(A)<1$ орасида бўлади.

Ҳақиқатан ҳам тасодифий ҳодисани таърифига асосан тажрибани айрим натижалари қулайлик туғдириши ва туғдирмаслиги мумкин.

$0<m<1$ Булардан келиб чиқадики исталган

$0<\frac{m}{n}<n$ А ҳодисани эҳтимоллиги 0,1 оралиғида бўлади. $0\le P(A)\le 1$

1-м: 3 та мерган нишон томон 1 тадан ўқ отди. Шунда $A_к$-К-чи мерганни отган ўқини нишонга тегиши бўлса, (к=1,2,3) у ҳолда

1. $A_1+A_2+A_3$ 3. $A_1\cdot A_2\cdot \overline{A}_3$

2. $A_1\cdot A_2\cdot A_3$ 4. $A_1\cdot \overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3$

1. $A_1\cdot A_2\cdot A_3\Rightarrow$ 3 ла мерган нишон томон ўқ отганда ақалли биттасини нишонга тегиши ҳодисаси.

2. $A_1\cdot A_2\cdot \overline{A}_3\Rightarrow$ 3 ла мерган нишон томон 1 тадан ўқ отганда 3 ла ўқини ўқини нишонга тегиши ҳодисаси.

3. $A_1\cdot A_2\cdot \overline{A}_3\Rightarrow$ 3 ла мерган нишон томон 1 тадан ўқ отганда 1,2 мерганни ўқини нишонга тегиши 3-мерганни ўқини нишонга тегмаслик ҳодисаси.

4. $A_1\cdot \overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\Rightarrow$ 3 ла мерган ўқ отганда фақат 1 тасини нишонга тегиш ҳодисаси.

2-м: Кубикни 3 марта ташланди. Шунда 6 очко ёзилган томонни камида бир марта тушиш ҳодисаси топинг.

А- “кубик 3 марта ташланганда ақалли бир марта 6 очкони тушиш ҳодисаси”

A_1 – кубикни 1 марта ташлаганда 6 очкони тушиш ҳодисаси.

A_2 – кубикни 2-марта ташланганда 6 очкони тушиш ҳодисаси.

A_3 – кубикни 3-марта ташланганда 6 очкони тушиш ҳодисаси.

$A=A_1+A_2+A_3$

$P(A)=P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1)+P(A_2) +P(A_3)$

$A=A_1+A_2+A_3-A_i(i=\overline{1,3})$ – биргалашган ҳодиса. A_1, A_2, A_3 – ҳодисалар биргалашган ҳодисаси.

3-м: А-ҳодисани шундай ҳодисалар йиғиндиси шаклида ёзилган, улар биргалашмаган ҳодиса бўлсин.

$$A = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 +$$

$$+ \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \overline{A}_2 \cdot A_3;$$

Бу ёзувни афзаллиги

$$B \cdot C = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 = (A_1 \cdot \overline{A})(\overline{A}_2 \cdot \overline{A}_2) \cdot (\overline{A}_3 \cdot A_3)$$

шундан иборатки, бунда ҳар бир қўшилувчилар ўзаро биргалашмаган ҳодисалар бўлади.

Эҳтимолликнинг статистик таърифи.
Геометрик эҳтимоллик

Биз юқорида кўрган эҳтимолликнинг классик таърифи бир мунча чекланган. Бу таърифни чекланганлигига асосан тажриба ўтказилганда элементар ҳодисалар сони чекли бўлади ёки шу билан бирга ҳар бир элементар натижани тенг имкониятли эканлиги билан асосланади. Аслида турмуш ва тажрибада элементар ҳодисалар сони чексиз бўлган ҳол ҳам учраши мумкин ва ҳар бирини тенг имкониятли бўлиши шарт эмас. Бундай ҳолларда бу таърифдан фойдаланиб бўлмайди.

Ана шундай таърифлардан биттаси эҳтимолликнинг статистик таърифи бўлиб, бунда элементар ҳодисалар сони чексиз бўлиши мумкин.

Бу таърифни бериш учун ҳодиса рўй беришларини сонини частотаси ёки баъзан нисбий частотаси тушунчаси ишлатилади. Агар ҳодиса устида ўтказган тажрибалар сони n га тенг бўлиб, шулардан m тасида биз киритган ҳодиса рўй бериши кузатилса, у ҳолда бу ҳодисани рўй беришлари нисбий частотаси $W = \frac{m}{n}$ деб олинади.

Масалан: 100 дона деталдан иборат партияда 3 донаси ностандарт бўлса, у ҳолда шу партиядан таваккал олинган битта деталнинг яроқсиз бўлишини нисбий частотаси $W = \frac{3}{100} = 0{,}03$. Бу ҳодиса рўй беришлар сони нисбий частотаси билан шу ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигини фарқи шундаки, ҳар қандай ҳодисани рўй бериш эҳтимолини топиш учун албатта уни устида тажрибалар ўтказиш шарт эмас. Агар бу ҳодиса рўй беришлар сонини нисбий частотасини тажрибалаларни ўтказиш шарт. Бошқача айтганда ҳодиса эҳтимоллигини тажриба ўтказгунга қадар ҳисоблаш мумкин бўлса, нисбий частотасини тажриба ўтказгандан сўнг ҳисобланади.

Нисбий частотани камчилиги шундан иборатки, тажрибаларни чексиз ўтказиш имкони йўқ. Бунинг учун қўшимча ҳаражатларни талаб қилади. Бу эҳтимолнинг статиктик таърифини аниқлаш учун бир неча буюк олимлар тажриба ўтказганлар. унда тажрибаларни биринчи бўлиб, Хитой олимлари “демография” да қўллашган. Масалан: янги туғилган чақалоқни ўғил ёки қиз бўлишини шу таърифдан қўллашган.

Янги туғилган ўғил болалар сони $\frac{500}{100}$ жами чақалоқлар сони $\frac{1}{2}$ га бир мунча яқин бўлган. Сўнгра Бюффон ва Пирсон олимлар оддий симметрик тангани ташлаб, ундаги герб тушишлар сонини кузатишган.

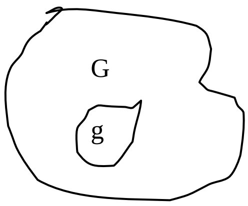
Масалан: Бюффон тангани 4040 марта ташлаганда 2048 тасида герб томон тушган. Бунда герб тушишилар нисбий частотаси $W=\frac{2048}{4040}\approx 0{,}5080$.

Пирсон эса тангани 2400 марта ташлаган, шундан 12012 тасида герб томони тушган. Бу ҳолда герб тушишларнинг нисбий частотаси $W=\frac{12012}{2400}\approx 0{,}05005$.

Булардан кўринадики, тажрибалардан ҳосил қилинаётган ҳодиса рўй беришлар сонини нисбий частотаси қандайдир бир $0<p<1$ орасидаги (бир) сон атрофида тебраниб қолади. Яъни бу частоталар кетма-кетлиги турғунлик характерига эга бўлади. Мана шундай ҳолатларни биринчи бўлиб, Мизес деган олим аниқлаган бўлиб, мана шу тебраниб қолган сонни $p\approx\frac{n_r}{n}$ ҳодисани рўй бериш эҳтимоллиги кўринишда бўлади. Бу кўринишдаги эҳтимолликни эҳтимолликнинг статистик таърифи деб айтилган. Юқоридагилардан кўринадки тажрибалар сони қанчалик кўп бўлса, ҳодиса рўй беришлар сонини нисбий частотаси шу ҳодиса рўй бериши эҳтимоллигига шунчалик яқин бўлади. Хатолик шунчалик кам бўлади.

Худди шу йўсинда аниқланган ҳодисалар рўй бериш нисбий частотаси, ҳодисалар рўй бериш эҳтимоллиги хоссаларга эга. Тажрибаларда шундай ҳоллар учрайдики мумкин бўлган элементар ҳодисалар сони саноқсиз бўлиб қолиши мумкин. Бундай ҳолда бу статистик таъриф ҳам ярамайди. Бунинг учун эҳтимолликнинг геометрик эҳтимолликни тушунчаси киритилади.

Қандайдир G соҳа қаралаётган бўлсин.
Уни ичида g соҳа жойлашган бўлсин.
Тажриба нуқтаси G соҳага отишдан иборат бўлсин.



Шунда бизни шу таваккал отилган нуқтани g соҳага тушиш қизиқтиради. Ана шу G соҳага томон отилган нуқтани уни ичида жойлашган g соҳага тушиш эҳтимоллиги g соҳани G соҳани қаерда жойлашганлиги уни қанақа формулада эканлигига боғлиқ бўлмасдан мана шу g соҳани ўлчовига боғлиқ бўлиб, бу эҳтимоллик $P=\frac{mesg}{mesG}$ (1) га тенг бўлади. Агар қаралаётган G соҳа 1-ўлчовли бўлса, -mes-узунлик бўлади, G соҳа 2-ўлчовли бўлса, mes-юза бўлади. Агар G 3-ўлчовли бўлса, mes-ҳажми бўлади. (1) формула орқали аниқланган эҳтимолликни геометрик эҳтимоллик дейилиб, бунда статистик таъриф бўйича аниқланган эҳтимолликни камчилигини тўлдиради.

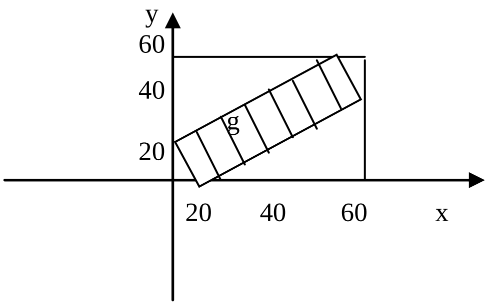
Бу эҳтимоллик ҳам эҳтимолликнинг барча хоссаларини қаноатлантиради.

Масалан: 2та шахс суткани маълум бир соатида учрашишга шартлашишди. 12:00 13:00 орасида. 1-бўлиб келган шахс иккинчисини 20 минут давомида кутишга келишди. Шу 20 минут давомида келмаса учрашиш бўлмайди. 12 ва 13 орасидаги кутган 20 минут ичида келса, учрашув бўлади. Мана шунда ҳар иккила шахсни учрашиш эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш: 1-бўлиб келган шахсни учрашувга келиш моментини x-орқали белгилайлик. 2-шахсни учрашувга келиш моментини у-орқали белгилайли.

Ана шу ҳар 2 ла шахс 20 минут давомида учрашишлари учун зарурий шарт $|x-y| \le 20$ бошқарилиши зарур.

2-шахсни учрашувга келиш моментини абцисса ўқига 2-шахсни учрашувга келиш моменти эса ордината ўқига жойлаштирамиз.



Мумкин бўлган ҳамма элементар ҳодисалар сони чексиз кўп бўлиб, томони 60 га тенг бўлган квадрат нуқталаридан иборат.

Буни қизиқтирган ҳодисани рўй бериши учун, яъни иккала шахсни учрашиши учун қулайлик туғдирувчи соҳа $g=|x-y| \le 20$ дан иборат бўлади. Демак, ҳар иккала шахсни учратиш эҳтимоллиги юқоридаги (1) формулага асосан $p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{20 \cdot 100}{60 \cdot 60} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

mes 6-60^2

Ҳар иккала шахс $p = \frac{5}{9}$ эҳтимоллик билан учрашар экан.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Н.Я.Виленкин. Математика. – М., 1977.
2. Л.П.Стойлова, А.М.Пишкало. Бошланғич математика курси асослари. Т., 1991.
3. О.Худойбергенов. Математика. Т. 1980.
4. А.Г.Хикматов, Т.Турдиев. Математик анализ. Т. 1990.
5. А.Г.Ҳикматов. Математик анализдан машқлар тўплами. Т. 1992.
6. М.Юнусметов, М.Жўраева. Геометрия – 1. Т. 1994.
7. Ҳ.Н.Назаров, Х.Очилова, Е.Подгорнова. Геометриядан машқлар тўплами. Т. 1994.
8. Р.Н.Назаров, Б.Т.Тошпўлатов, А.Ф.Дусумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси. Т. 1-қисм 1993, 2-қисм. 1995.
9. Н.Б.Богорелов. Геометрия 7 – 11. Т. 1995.
10. А.В.Погорелов. Геометрия 7 – 11. Т. 1995.
11. А.Рибников. История математики. М. 1975.

12. А.П.Киселев. Геометрия. 1-қисм.
13. А.П.Киселев. Геометрия. 2-қисм.
14. Х.Сиддиқов. Ўрта Осиёда геометрия. Т. 1990.
15. Р.Отажонов. Геометрик ясаш методлари. Т. 1980.